

Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ**10 класс**

6 февраля 2019 года

Вариант МА00309

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

*Желаем успеха!***Часть 1**

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

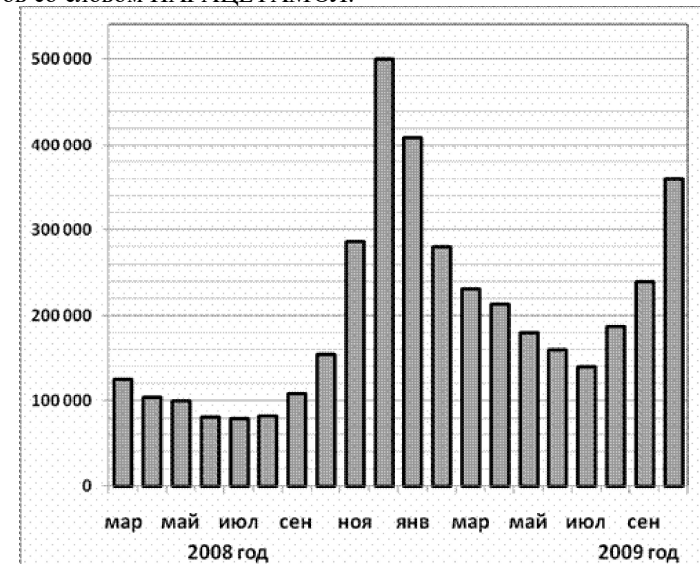
1

В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10 % от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 8400 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

Ответ: _____.

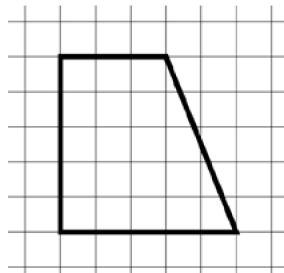
2

На диаграмме показано количество запросов со словом ПАРАЦЕТАМОЛ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 года по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было таких месяцев за данный период, когда было сделано более 300 000 запросов со словом ПАРАЦЕТАМОЛ.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ: _____.

- 4 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5 независимо от других продавцов. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно.

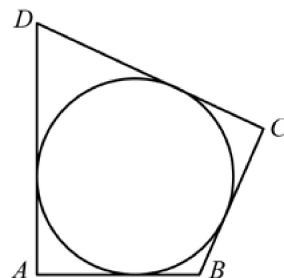
Ответ: _____.

- 5 Решите уравнение $\frac{x-5}{2x-7} = \frac{x-5}{x-8}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

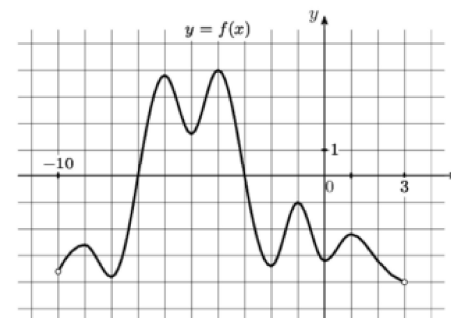
Ответ: _____.

- 6 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 56, вписана окружность, $AB=12$. Найдите CD .

Ответ: _____.

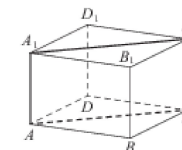


- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3$.



Ответ: _____.

- 8 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 9, а диагональ BD_1 равна 15. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .



Ответ: _____.

- 9 Найдите значение выражения $a(49a^2 - 64) \left(\frac{1}{7a+8} - \frac{1}{7a-8} \right)$ при $a = 35,4$.

Ответ: _____.

- 10** Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 5. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 8.

Ответ: _____.

- 11** Игорь и Паша могут покрасить забор за 21 час. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 28 часов, а Володя и Игорь — за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{29 + 2x - x^2}$.

Ответ: _____.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

- 13** а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x$.
 б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.
- 14** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.
 а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.
 б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1 .
- 15** Решите неравенство $x + 1 - \frac{4}{x+1} \geq \frac{6-4x-2x^2}{x+2}$.
- 16** Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .
 а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.
 б) Найдите угол APC , если $DM = 1$ и $MC = 4$.
- 17** В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
 — каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
 — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
 На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 1,8 млн рублей?

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(3|x| + x - a)^2 = 18x^2 + 2(x - a)^2$$

имеет единственное решение на интервале $(-1; 1)$.

19

Петя играет солдатиками из двух разных наборов. В первом наборе солдатиков меньше, чем во втором, но больше чем 46. А всего солдатиков у Пети меньше 111. Петя знает, что может построить колонну по несколько солдатиков в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдатиков, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдатиков из разных наборов.

а) Сколько солдатиков может быть в первом наборе и сколько во втором? Приведите один пример.

б) Может ли Петя построить колонну указанным способом по 13 солдатиков в ряд?

в) Сколько всего солдатиков может быть у Пети? Укажите все возможные варианты.

**Ответы на тренировочные варианты 00309-00310 (профильный уровень 10 класс)
от 06.02.2019**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
00309	9240	3	4	0,125	5	16	9	108	- 566,4	5	18	1
00310	8580	8	3,5	0,064	- 5	21	5	672	- 226,8	2	15	- 8

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x$.б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.**Решение.**

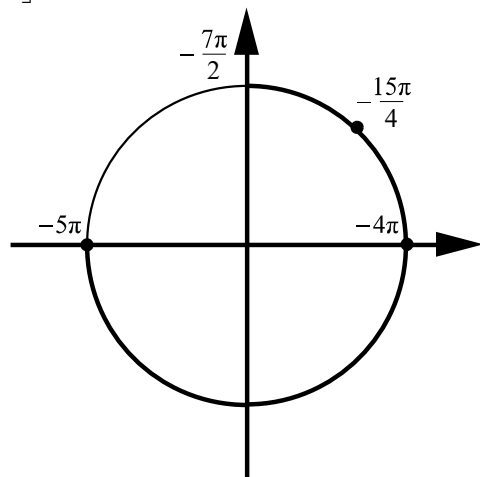
а) Используя формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, уравнение можно записать в виде $2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x$; $\sin x \cdot \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Следовательно, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Получим πk ; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим -5π ; -4π ; $-\frac{15\pi}{4}$.



Ответ: а) πk ; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) -5π ; -4π ; $-\frac{15\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.

а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1 .

Решение.

а) Пусть $AB = a$, тогда $A_1 B = a\sqrt{2}$, $A_1 K = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ и

$$BK = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}.$$

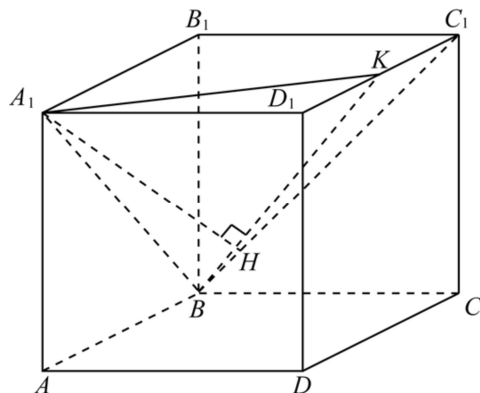
В треугольнике $A_1 BK$ по теореме косинусов

$$\cos \angle A_1 BK = \frac{A_1 B^2 + BK^2 - A_1 K^2}{2 \cdot A_1 B \cdot BK} = \frac{2a^2 + \frac{9}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Опустим перпендикуляр $A_1 H$ из вершины A_1 на прямую BK . Отрезок $A_1 H$ — высота треугольника $A_1 BK$. Тогда $A_1 H = A_1 B \cdot \sin \angle A_1 BK = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a$.

Следовательно, расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдём площадь треугольника A_1BK .



$$S_{\Delta A_1BK} = \frac{1}{2} A_1H \cdot BK = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3}{2} a = \frac{3}{4} a^2.$$

Проекцией этого треугольника на плоскость BCC_1 является треугольник BB_1C_1 . Площадь треугольника BB_1C_1 равна $S_{\Delta BB_1C_1} = \frac{1}{2} a^2$. Отношение площадей этих треугольников является косинусом угла α между плоскостями KBA_1 и BCC_1 . Следовательно, $\cos \alpha = \frac{S_{\Delta BB_1C_1}}{S_{\Delta A_1BK}} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\frac{3}{4} a^2} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\arccos \frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b , возможно, с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $x+1 - \frac{4}{x+1} \geq \frac{6-4x-2x^2}{x+2}$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x+1)^2 - 4}{x+1} \geq \frac{-2(x-1)(x+3)}{x+2}; \quad \frac{(x-1)(x+3)}{x+1} + \frac{2(x-1)(x+3)}{x+2} \geq 0;$$

$$\frac{(x-1)(x+3)(x+2+2(x+1))}{(x+1)(x+2)} \geq 0; \quad \frac{(x-1)(x+3)(3x+4)}{(x+1)(x+2)} \geq 0.$$

Получаем $-3 \leq x < -2$; $-\frac{4}{3} \leq x < -1$; $x \geq 1$.

Ответ: $[-3; -2)$; $[-\frac{4}{3}; -1)$; $[1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .

а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.

б) Найдите угол APC , если $DM = 1$ и $MC = 4$.

Решение.

а) Обозначим $DM = BQ = x$, $CM = y$. Треугольники CMP и DMA подобны

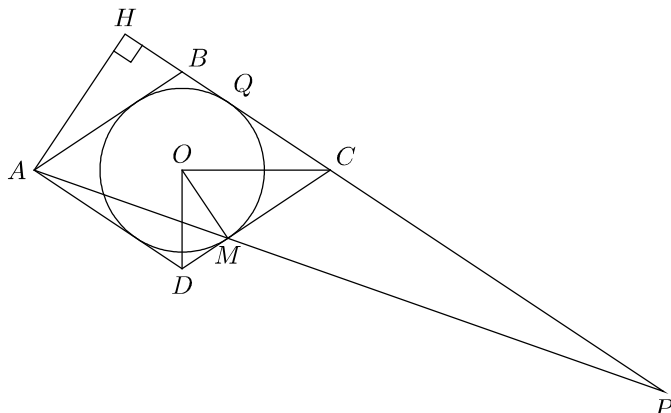
с коэффициентом подобия $\frac{CM}{MD} = \frac{y}{x}$, поэтому

$$CP = \frac{y}{x} \cdot AD = \frac{y(x+y)}{x}.$$

Тогда

$$BP = BC + CP = x + y + \frac{y(x+y)}{x} = (x+y) \left(1 + \frac{y}{x} \right) = \frac{(x+y)^2}{x} = \frac{BC^2}{BQ}.$$

Следовательно, $BP \cdot BQ = BC^2$.



б) Пусть O — центр окружности, радиуса r , вписанной в ромб. Тогда OM — высота прямоугольного треугольника COD , проведенная из вершины прямого угла, поэтому

$$r = OM = \sqrt{DM \cdot MC} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2.$$

Значит, высота ромба равна $2r = 4$.

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BC . Тогда AH — высота ромба, поэтому

$$AH = 2r = 4; BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Из подобия треугольников CMP и DMA находим, что

$$CP = \frac{CM}{MD} \cdot AD = 4 \cdot 5 = 20.$$

Значит,

$$PH = CP + BC + BH = 20 + 5 + 3 = 28.$$

Из прямоугольного треугольника AHP находим, что

$$\operatorname{tg} \angle APH = \frac{AH}{PH} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

Следовательно, $\angle APC = \angle APH = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки

Имеется верное доказательство утверждения пункта a .

ИЛИ

При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.

ИЛИ

Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Максимальный балл

1

0

3

17

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 1,8 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$6, \frac{6(n-1)}{n}, \dots, \frac{6 \cdot 2}{n}, \frac{6}{n}, 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$7,2, \frac{7,2(n-1)}{n}, \dots, \frac{7,2 \cdot 2}{n}, \frac{7,2}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1,2 + \frac{6}{n}, \frac{1,2(n-1) + 6}{n}, \dots, \frac{1,2 \cdot 2 + 6}{n}, \frac{1,2 + 6}{n}.$$

Получаем $1,2 + \frac{6}{n} = 1,8$, откуда $n = 10$.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(3|x| + x - a)^2 = 18x^2 + 2(x - a)^2$$

имеет единственное решение на интервале $(-1; 1)$.

Решение.

Перейдём к равносильному уравнению:

$$9x^2 + 6|x|(x - a) + (x - a)^2 = 18x^2 + 2(x - a)^2;$$

$$(3|x| - (x - a))^2 = 0;$$

$$3|x| - x + a = 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 3|x| - x + a$. Эта функция убывает при $x \leq 0$ и возрастает при $x \geq 0$.

Следовательно, уравнение $3|x| - x + a = 0$ имеет единственный корень на интервале $(-1; 1)$ в одном из следующих случаев:

- 1) функция $f(x)$ обращается в ноль в единственной точке, и эта точка принадлежит интервалу $(-1; 1)$;
- 2) функция $f(x)$ принимает при $x = -1$ и $x = 1$ ненулевые значения разных знаков;
- 3) функция $f(x)$ принимает нулевое значение при $x = 1$, а при $x = -1$ — положительное;
- 4) функция $f(x)$ принимает нулевое значение при $x = -1$, а при $x = 1$ — положительное.

Рассмотрим первый случай. Имеем

Функция $f(x)$ обращается в ноль в единственной точке тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$, то есть когда $a = 0$. При этом нулём функции является точка $x = 0$, которая принадлежит интервалу $(-1; 1)$.

Рассмотрим второй случай.

$$f(-1)f(1) = (4 + a)(2 + a) < 0,$$

откуда $-4 < a < -2$.

Рассмотрим третий случай.

Если $f(1) = 0$, то $a = -2$; при $a = -2$ имеем $f(-1) = 2 > 0$, откуда $a = -2$.

Рассмотрим четвёртый случай.

Если $f(-1) = 0$, то $a = -4$; при $a = -4$ имеем $f(1) = -2 < 0$.

Ответ: $a = 0$; $-4 < a \leq -2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , кроме $a = -2$	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения, в том числе и лишнее $a = -4$	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

Петя играет солдатиками из двух разных наборов. В первом наборе солдатиков меньше, чем во втором, но больше чем 46. А всего солдатиков у Пети меньше 111. Петя знает, что может построить колонну по несколько солдатиков в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдатиков, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдатиков из разных наборов.

а) Сколько солдатиков может быть в первом наборе и сколько во втором? Приведите один пример.

б) Может ли Петя построить колонну указанным способом по 13 солдатиков в ряд?

в) Сколько всего солдатиков может быть у Пети? Укажите все возможные варианты.

Решение.

Пусть в первом наборе k солдатиков, во втором l солдатиков. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 8, и при этом

$$\begin{cases} 47 \leq k < l, \\ k + l \leq 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдатиков. Вместе солдатиков 110, их можно построить в колонну по 10 солдатиков в ряд так, что 5 рядов будет заполнено солдатиками только из первого набора, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель равен 13. Тогда, учитывая, что $47 \leq k < 55$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 солдатиков, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l , поэтому $l - k \geq 9$; $k - l \leq -9$, что вместе с условием $k + l \leq 110$ приводит к неравенству $2k \leq 101$, то есть $k \leq 50$. При этом

$$k + d \leq l \leq 110 - k,$$

где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \leq l \leq 110 - 47 = 63$. Противоречие.

Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в наборах всего 108 солдатиков.

Если $k = 49$, то $98 \leq l \leq 110 - 49 = 61$. Противоречие.

Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в наборах всего 110 солдатиков.

Ответ: а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4