

Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ**10 класс**

4 февраля 2025 года

Вариант МА2400110

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

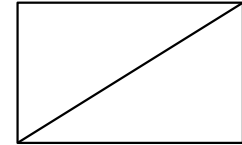
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

Периметр прямоугольника равен 66, а диагональ равна 32. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: _____.

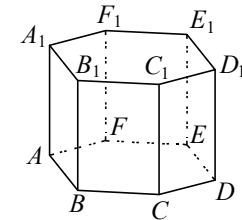
2

Даны векторы $\vec{a}(-9; 4)$ и $\vec{b}(0; 7,5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.

3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 50. Найдите тангенс угла $AD_1 D$.



Ответ: _____.

4

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 20 спортсменов из России, в том числе Максим Плотвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Плотвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- 5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

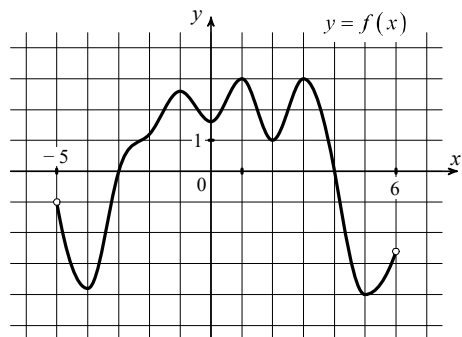
- 6 Найдите корень уравнения $\frac{2}{3}x = -13\frac{1}{3}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(4a^2 - 81) \cdot \left(\frac{1}{2a-9} - \frac{1}{2a+9} \right)$ при $a = \sqrt{31} + 5$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 11$.



Ответ: _____.

- 9 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 120$ Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \frac{c+u}{c-v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с),}$$

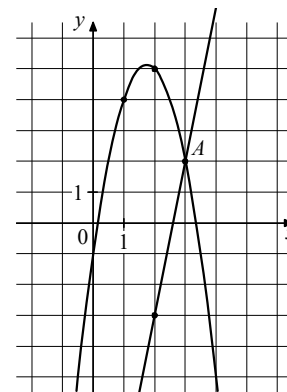
а $u = 5$ м/с и $v = 8$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 130 Гц?

Ответ: _____.

- 10 В сосуд, содержащий 4 кг 18-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x - 13$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 32}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
- 14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$. Известно, что $AB = 7\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
 а) Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро $B_1 C_1$ на два равных отрезка.
 б) Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.
- 15 Решите неравенство $\frac{3x + 28 - x^2}{x^2 - 7x} \leq 2 + \frac{2}{x + 3}$.
- 16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 15 млн рублей на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:
 — каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 — с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
 — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
 Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4,9 млн рублей, а наименьший — не менее 2,9 млн рублей.
- 17 Периметр треугольника ABC равен 30. На сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $BE : EA = BF : FC = 3 : 2$. Прямая EF касается окружности, вписанной в треугольник.
 а) Докажите, что $AC = 6$.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6|x - y| + 6|a|, \\ x + y = a \end{cases}$$
- имеет нечётное число различных решений.

- 19 а) Приведите пример такого натурального числа n , что числа n^2 и $(n + 14)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40.
 б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а свойством?
 в) Сколько существует двузначных чисел $m < 40$, для каждого из которых существует ровно 90 трёхзначных чисел n , таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40?

math100.ru

**Ответы на тренировочные варианты 2400109-2400110 (профильный уровень) от
04.02.2025**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2400109	6,5	44	2	0,6	0,078	- 27	- 4	8	629	7	6	9
2400110	32,5	30	2	0,76	0,0296	- 20	18	7	164	8	- 2	- 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде

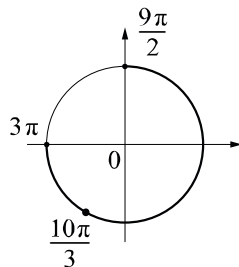
$$6 - 6\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0; \quad 6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0.$$

Пусть $y = \cos x$, тогда исходное уравнение примет вид

$$6y^2 - 5y - 4 = 0, \text{ откуда находим } y = \frac{4}{3} \text{ или } y = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\cos x = \frac{4}{3}$ корней не имеет.Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, получаем $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.Получаем число $\frac{10\pi}{3}$.**Ответ:** а) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$.

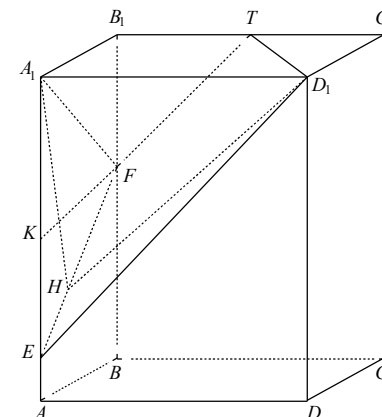
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$. Известно, что $AB = 7\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро $B_1 C_1$ на два равных отрезка.б) Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.**Решение.**

а) Так как $A_1 E : EA = 6 : 1$ и $AA_1 = 14$, получаем, что $A_1 E = 12$ и $EA = 2$. Так как $B_1 F : FB = 3 : 4$ и $BB_1 = 14$, получаем, что $B_1 F = 6$ и $FB = 8$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и CBB_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро $B_1 C_1$ в такой точке T , что прямая FT параллельна прямой ED_1 . Значит, треугольники $EA_1 D_1$ и $FB_1 T$ подобны, а поскольку $EA_1 = A_1 D_1 = 12$, получаем, что и $FB_1 = B_1 T = 6$. Значит, $TC_1 = 6$ и $B_1 T : TC_1 = 1 : 1$.



б) Опустим перпендикуляр $A_1 H$ из точки A_1 на прямую EF пересечения плоскостей EFD_1 и $AA_1 B_1$. Угол $A_1 H D_1$ будет искомым. Найдём $A_1 H$. Для этого проведём в трапеции $EA_1 B_1 F$ высоту $FK = 7\sqrt{2}$ (из результатов пункта а следует, что K — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1 , получим $A_1 H \cdot EF = A_1 E \cdot FK$, то есть

$$A_1 H = \frac{FK \cdot A_1 E}{EF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 12}{\sqrt{6^2 + (7\sqrt{2})^2}} = \frac{84}{\sqrt{67}}.$$

$$A_1 D_1 : A_1 H = 12 : \frac{84}{\sqrt{67}} = \frac{\sqrt{67}}{7}.$$

Ответ: б) $\arctg \frac{\sqrt{67}}{7}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

15

Решите неравенство $\frac{3x+28-x^2}{x^2-7x} \leq 2 + \frac{2}{x+3}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2x+8}{x+3} + \frac{x^2-3x-28}{x^2-7x} \geq 0; \quad \frac{2x+8}{x+3} + \frac{(x+4)(x-7)}{x(x-7)} \geq 0.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \frac{2x+8}{x+3} + \frac{x+4}{x} \geq 0, \\ x \neq 7, \end{cases} \quad \text{откуда } \begin{cases} \frac{3x^2+15x+12}{x(x+3)} \geq 0, \\ x \neq 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x+4)(x+1)}{x(x+3)} \geq 0, \\ x \neq 7. \end{cases}$$

Решая неравенство, получаем $x \in (-\infty; -4]; (-3; -1]; (0; 7); (7; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4]; (-3; -1]; (0; 7); (7; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -4 и/или -1 . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 15 млн рублей на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4,9 млн рублей, а наименьший — не менее 2,9 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$15; 12,5; 10; 7,5; 5; 2,5; 0.$$

По условию в январе каждого года долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$,

тогда последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе каждого года такова:

$$15k; 12,5k; 10k; 7,5k; 5k; 2,5k.$$

Следовательно, платежи (в млн рублей) должны быть следующими:

$$15k - 12,5; 12,5k - 10; 10k - 7,5; 7,5k - 5; 5k - 2,5; 2,5k.$$

Наибольший платёж составит $15k - 12,5$ млн рублей, а наименьший платёж составит $2,5k$ млн рублей.

Получаем $15k - 12,5 \leq 4,9$, откуда следует, что $k \leq 1,16$, и $2,5k \geq 2,9$, откуда следует, что $k \geq 1,16$. Значит, $k = 1,16$ и $r = 16$.

Ответ: 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 17 Периметр треугольника ABC равен 30. На сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $BE:EA = BF:FC = 3:2$. Прямая EF касается окружности, вписанной в треугольник.

а) Докажите, что $AC = 6$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

Решение.

а) Четырёхугольник $AEFC$ описан около окружности, поэтому $AE + FC = AC + EF$. Треугольники BEF и BAC подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{5}$. Значит, $AE = \frac{2}{5}AB$,

$$FC = \frac{2}{5}BC, \quad EF = \frac{3}{5}AC. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\frac{2}{5}AB + \frac{2}{5}BC = AC + \frac{3}{5}AC; \quad \frac{2}{5}(AB + BC) = \frac{8}{5}AC.$$

Периметр треугольника ABC равен 30, поэтому $AB + BC = 30 - AC$, откуда получаем

$$\frac{2}{5}(30 - AC) = \frac{8}{5}AC; \quad AC = 6.$$

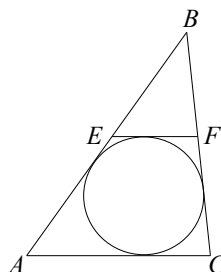
б) Пусть $BC = x$. Тогда получаем $AB = 24 - x$. По теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2; \quad 36 + x^2 = (24 - x)^2; \quad 36 + x^2 = x^2 - 48x + 576,$$

откуда находим $x = \frac{45}{4}$. Значит, $BC = \frac{45}{4}$, и площадь треугольника ABC равна

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{135}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{135}{4}$.



При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.

ИЛИ

Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше

0

Максимальный балл

3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6|x - y| + 6|a|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

Решение.

Если $(x; y)$ — решение системы, то $(y; x)$ также её решение. Чтобы решений было нечётное число, нужно, чтобы нечётное число решений имело вид $(x; x)$.

Получаем

$$\begin{cases} 2x^2 = 6|a|, \\ 2x = a; \end{cases} \quad 2x^2 = 12|x|, \text{ откуда находим } x = 0, x = 6 \text{ или } x = -6.$$

Если $x = 6$, то $a = 12$; если $x = -6$, то $a = -12$; если $x = 0$, то $a = 0$.

Для каждого из найденных значений a существует ровно одно решение вида $(x; x)$, найденное выше. Все остальные решения, если они есть, будут иметь вид $(x; y)$, где $x \neq y$, значит, их количество чётно и общее количество решений нечётно.

Ответ: $a = 0$, $a = 12$ и $a = -12$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , но решение недостаточно обоснованно	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию решений вида $(x; x)$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

- а) Приведите пример такого натурального числа n , что числа n^2 и $(n+14)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40.
- б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а свойством?
- в) Сколько существует двузначных чисел $m < 40$, для каждого из которых существует ровно 90 трёхзначных чисел n , таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40?

Решение.

а) Например, пусть $n = 3$. Имеем $3^2 = 9$, $(3+14)^2 = 17^2 = 289$. Эти числа дают остаток 9 при делении на 40.

б) Пусть n^2 и $(n+14)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40. Тогда число $(n+14)^2 - n^2 = 14(2n+14) = 28(n+7)$ должно делиться на 40. Это будет выполнено тогда и только тогда, когда $n+7$ делится на 10. Значит, все искомые n имеют вид $n = 10p + 3$, где p — натуральное число или 0, и удовлетворяют неравенствам $100 \leq n < 1000$. Решая неравенства относительно p , получаем $10 - \frac{3}{10} \leq p < 100 - \frac{3}{10}$, $p = 10, 11, \dots, 99$, — ровно 90 различных решений, каждому из которых соответствует единственное искомое число n .

в) Пусть n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 40. Тогда число $(n+m)^2 - n^2 = m(2n+m)$ должно делиться на 40. Наибольший общий делитель d чисел m и 40 может равняться 1, 2, 4, 5, 8, 10 или 20. Чтобы $m(2n+m)$ делилось на 40, необходимо и достаточно, чтобы число $2n+m$ делилось на $\frac{40}{d}$. Если $d = 1$ или 5, то m нечётно и таких n не существует.

Если m чётно, то для некоторого натурального k имеем $m = 2k$, и условию удовлетворяют те и только те трёхзначные n , для которых $2(n+k)$ делится на $\frac{40}{d}$. При $d = 2$ таких n существует ровно 90, так как подходящими будут

те и только те n , при которых $n+k$ делится на 10 (решение аналогично пункту б). При $d = 4$, $d = 8$, $d = 20$ таких чисел n будет больше, так как подойдут все трёхзначные числа, для которых $n+k$ делится на 5. При $d = 5$, $d = 10$ таких чисел n также будет больше, так как подойдут все трёхзначные числа, для которых $n+k$ делится на 4. Значит, условию задачи удовлетворяют чётные двузначные числа $m < 40$, не кратные 4 и 5. Это числа 14, 18, 22, 26, 34, 38, и всего их 6.

Ответ: а) 3; б) 90; в) 6.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в, и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4