Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
20 декабря 2018 года
Вариант МА10211
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

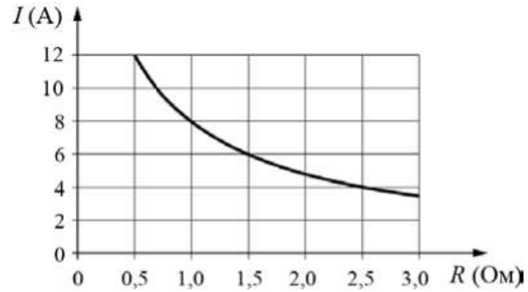
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Для ремонта квартиры требуется 69 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

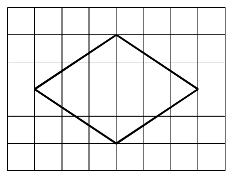
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. На сколько ампер изменится сила тока, если увеличить сопротивление с 0,5 ома до 1 ома?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

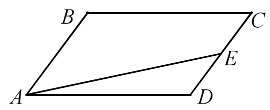
4 На олимпиаде по биологии 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 150 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-2)^3 = -216$.

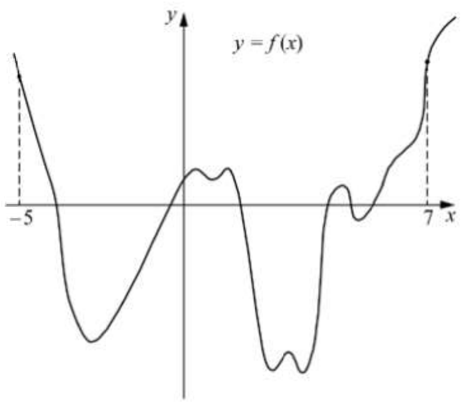
Ответ: ___________________________.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 180. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.



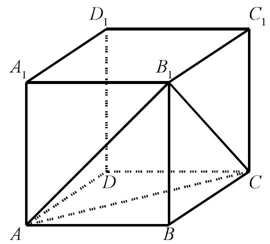
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-5;7)$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1,8. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCB_1$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}\cdot\cos\frac{9\pi}{8}$.

Ответ: ___________________________.

10 Два тела массой $m = 5$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия не менее 45 джоулей.

Ответ: ___________________________.

11 Первый насос наполняет бак за 15 минут, второй — за 20 минут, а третий — за 2 часа. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y = 2^{5-8x-x^2}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{8}{1-\sin^2 x}-\frac{9}{\cos x}=14$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 20, а сторона основания равна 24. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $4^{x-2}-2^{x-2}\left(64-x^2\right)-64x^2\geq 0$.

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=10$, $AC=6$ и $BC=8$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+5x+8$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через шесть лет суммарная прибыль может составить не менее 315 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=(a+1)x^2+(2a-1)x+a+2, \\ x=(a+1)y^2+(2a-1)y+a+2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*2*3*4}{1*2*5*10}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\frac{5}{3}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*2*4*6*8}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{2}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{1}{2}-\frac{1*2*4*6*8}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –?

Ответы на тренировочные варианты 10209-10212 (профильный уровень) от 20.12.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10209	7	1	3	0,24	- 80	36	4	1,5	125	1125	84	2
10210	7	0,5	2	0,36	- 201	24	5	8,75	216	875	72	8
10211	10	4	12	0,25	- 4	45	5	0,3	2	60	8	-4
10212	10	6	6	0,2	- 2	39	4	0,6	3	60	27	7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{8}{1-\sin^2 x}-\dfrac{9}{\cos x}=14$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

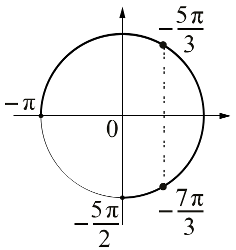
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде $\dfrac{8}{\cos^2 x}-\dfrac{9}{\cos x}=14$;

$$\frac{8-9\cos x-14\cos^2 x}{\cos^2 x}=0;\ -\frac{14\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{8}{7}\right)}{\cos^2 x}=0.$$

Следовательно, $\cos x=\dfrac{1}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.



Получим числа $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$; $-\dfrac{5\pi}{3}$.

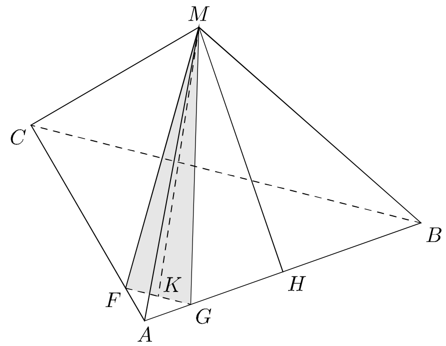
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 20, а сторона основания равна 24. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

Решение.



а) Из условия следует, что $AG=AF=4$. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG=MF$.

б) Проведём высоту MH боковой грани AMB. Из прямоугольного треугольника AHM находим

$$MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=16.$$

В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 8. Поэтому

$$MG=\sqrt{MH^2+HG^2}=\sqrt{256+64}=8\sqrt{5}.$$

Треугольник AGF равносторонний, поэтому $GF=AG=4$. В равнобедренном треугольнике GMF проведём высоту MK. Она делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем

$$MK=\sqrt{MG^2-GK^2}=\sqrt{320-4}=2\sqrt{79}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна $\dfrac{1}{2}\cdot GF\cdot MK=4\sqrt{79}$.

Ответ: $4\sqrt{79}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $4^{x-2}-2^{x-2}\left(64-x^2\right)-64x^2\geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде $4^{x-2}-64\cdot 2^{x-2}+2^{x-2}x^2-64x^2\geq 0$;

$2^{x-2}\left(2^{x-2}+x^2\right)-64\left(2^{x-2}+x^2\right)\geq 0$; $\left(2^{x-2}+x^2\right)\left(2^{x-2}-64\right)\geq 0$; $x-2\geq 6$; $x\geq 8$.

Ответ: $[8;+\infty)$.

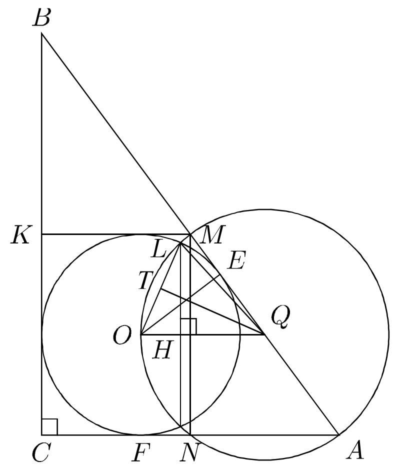
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=10$, $AC=6$ и $BC=8$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

Решение.



а) Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C. Пусть радиус его вписанной окружности равен r. Тогда

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{8+6-10}{2}=2.$$

Пусть K — середина катета BC. Тогда расстояние между прямыми KM и AC равно длине отрезка MN, то есть 4. Значит, расстояние между этими прямыми равно диаметру вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно, эта окружность касается средней линии KM.

б) Треугольник AMN прямоугольный с прямым углом при вершине N, значит, центр описанной окружности треугольника AMN — середина Q отрезка AM, а радиус равен 2,5. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Тогда

$$CF=r=2,\ AE=AF=AC-CF=6-2=4,\ EQ=AE-AQ=4-2{,}5=1{,}5,$$

$$OQ=\sqrt{OE^2+EQ^2}=\sqrt{2^2+1{,}5^2}=2{,}5.$$

Пусть L — одна из точек пересечения рассматриваемых окружностей. Общая хорда пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам, значит, искомое расстояние равно удвоенной высоте LH треугольника OLQ со сторонами $OQ=2{,}5$, $OL=2$ и $QL=2{,}5$, проведённой из вершины L. Высота QT этого равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является медианой, значит,

$$QT=\sqrt{LQ^2-LT^2}=\sqrt{2{,}5^2-1^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Поэтому

$$LH=\frac{OL\cdot QT}{OQ}=\frac{2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot 2{,}5}=\frac{2\sqrt{21}}{5}.$$

Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+5x+8$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через шесть лет суммарная прибыль может составить не менее 315 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$px-\left(0{,}5x^2+5x+8\right)=-0{,}5x^2+\left(p-5\right)x-8$.

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-5$. Наибольшее значение равно $\frac{\left(p-5\right)^2}{2}-8$. Через 6 лет прибыль составит не менее 315 млн рублей, если

$$\frac{\left(p-5\right)^2}{2}-8\ge\frac{315}{6};$$

откуда $\left(p-5\right)^2\ge 121$; $\left(p-16\right)\left(p+6\right)\ge 0$.

Цена продукции не может быть отрицательной, поэтому $p=16$.

Ответ: 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=\left(a+1\right)x^2+\left(2a-1\right)x+a+2,\\ x=\left(a+1\right)y^2+\left(2a-1\right)y+a+2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение:

$$\left(a+1\right)x^2+\left(2a-2\right)x+a+2=0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a\ne -1$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$\left(2a-2\right)^2-4\left(a+1\right)\left(a+2\right)=0;$$

$$5a+1=0,$$

откуда $a=-0{,}2$.

При $a=-0{,}2$ получаем $x^2-3x+2{,}25=0$, откуда $x=1{,}5$. Тогда решением системы является пара $\left(1{,}5;1{,}5\right)$.

Если $a=-1$, получается линейное уравнение $4x-1=0$, которое имеет единственное решение $x=0{,}25$. Решением системы является пара $\left(0{,}25;\,0{,}25\right)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x \neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x - y \neq 0$:

$$-1 = (a+1)(x+y) + 2a - 1.$$

При $a = -1$ получается, что $a = 0$. Решений нет.

При $a = -0{,}2$ получаем $y = 0{,}5 - x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$0{,}5 - x = 0{,}8x^2 - 1{,}4x + 1{,}8; \quad x^2 + 0{,}5x + 1{,}625 = 0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: -1; $-0{,}2$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
Присутствуют все шаги решения, получены верные значения параметра, но отсутствует доказательство того, что при каждом из них система имеет единственное решение	3
С помощью верного рассуждения получено только одно значение a	2
С помощью верного рассуждения задача сведена к исследованию квадратного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\dfrac{1*2*3*4}{1*2*5*10}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\dfrac{5}{3}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\dfrac{1*2*4*6*8}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\dfrac{2}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1*2*4*6*8}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –?

Решение.

а) Да. Например, $\dfrac{1+2+3+4}{1-2+5-10} = \dfrac{10}{-6} = -\dfrac{5}{3}$.

б) Рассмотрим какую-либо возможную расстановку знаков в знаменателе $1*4*8*12*16$ данной дроби. Имеем $1 \pm 4 \pm 8 \pm 12 \pm 16 = 1 + 4(\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4)$, где знаки + и – расставлены соответствующим образом. Сумма всех чисел в последних скобках чётна и может принимать значения вида $2m$, где m — некоторое целое число от -5 до 5. Значит, знаменатель дроби равен $8m + 1 = 7m + (m+1)$. Среди всех возможных значений m знаменатель делится на 7 лишь при $m = -1$. Следовательно, если знаки расставлены так, что данная дробь равна $\dfrac{2}{7}$, то её знаменатель $1*4*8*12*16$ равен -7. Тогда её числитель $1*2*4*6*8$ равен -2. Пришли к противоречию, так как число $1 \pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm 8$ всегда при делении на 2 даёт остаток 1, а число -2 — остаток 0. Значит, расставить знаки требуемым образом невозможно.

в) Аналогично доказанному в пункте б) получаем, что при всевозможных расстановках знаков + и – выражение примет вид $\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{4k+1}{8m+1}\right|$, где k и m пробегают все целые числа от –5 до 5. Поскольку $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4m + \frac{1}{2}}{8m+1}$, получаем $\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{4k+1}{8m+1}\right| = \left|\dfrac{4(m-k) - \frac{1}{2}}{8m+1}\right|$. При фиксированном значении m это выражение минимально при $k = m$. В этом случае оно равно $\left|\dfrac{1}{16m+2}\right|$. Так как m пробегает все целые числа от -5 до 5, максимум модуля $16m + 2$ достигается при $m = 5$. Значит, наименьшее значение, которое может принимать выражение $\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1*2*4*6*8}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –, равно $\dfrac{1}{82}$. Оно достигается при $k = m = 5$ — в случае, когда каждый из знаков $*$ заменён на +.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\dfrac{1}{82}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4