Диагностическая работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
24 января 2019 года
Вариант МА10309
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

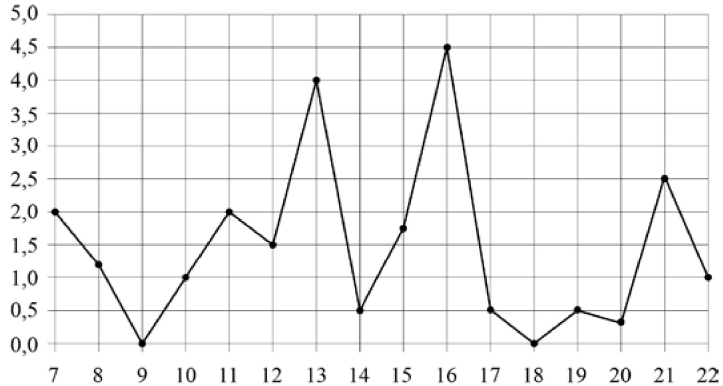
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В доме, где живёт Оля, 9 этажей и несколько подъездов. В каждом подъезде на каждом этаже находится по 3 квартиры. Оля живёт в квартире № 78. В каком подъезде находится квартира Оли?

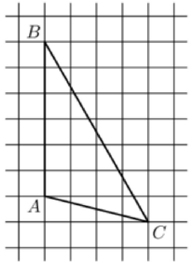
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней в этот период выпадало более 3 миллиметров осадков.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ____________________________.

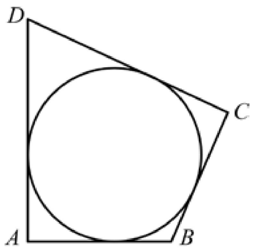
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 12 сумок из 150 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $2^{1-4x}=32$.

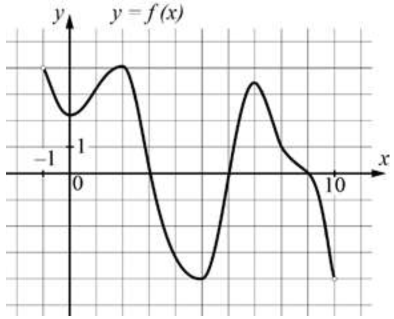
Ответ: ____________________________.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=44$, $CD=55$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



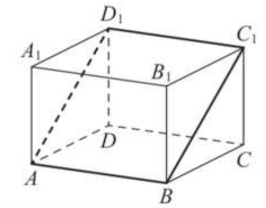
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;10)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[4;8]$.



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=3$, $AD=6$, $AA_1=8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ____________________________.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{32}\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sqrt{32}\sin^2\frac{5\pi}{8}$.

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F=\frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м.

Ответ: ___________________________.

11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+81}{x}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

14 В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой AC.

15 Решите неравенство $\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x+2}+\frac{x^2-3x+16}{x^2-3x}\ge 0$.

16 На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что точка M равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника DMG, если $AC=6$, $BC=8$, $AB=10$.

17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1;1)$.

19 Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ являются натуральными числами.
а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+2a_3b_3=4a_2b_2$.
б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1+a_4b_4=3a_2b_2$?
в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1+a_4b_4\le 210$?

Ответы на тренировочные варианты 10309-10312 (профильный уровень) от 24.01.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10309	3	2	3	0,92	- 1	198	2	30	- 4	30	59	9
10310	4	3	2	0,93	- 1	102	3	78	- 5	15	55	13
10311	152	3	6	0,25	- 4	16	0,5	2500	- 77	0,18	8	36
10312	102	2	4	0,25	- 7	29	0,5	1225	- 34	0,05	5	25

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде системы:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем

$$y\left(y+1\right)=0,\text{ откуда } y=0 \text{ или } y=-1.$$

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

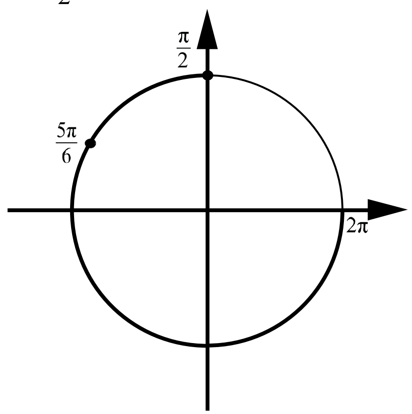
Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k,n\in\mathbb{Z}$.

Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Получим $x=\dfrac{5\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, $k,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

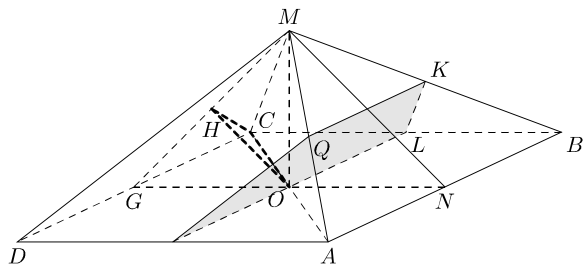
14

В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой AC.

Решение.



а) Пусть точка Q — середина ребра MA, а точка K — середина ребра MB. Плоскость α пересекает грань BMC по отрезку KL (точка L лежит на ребре BC), параллельному ребру MC. Ребро CD параллельно ребру AB, а ребро AB параллельно отрезку QK. Следовательно, плоскость α параллельна плоскости грани CMD. Поэтому прямая MD параллельна плоскости α.

б) Пусть длина стороны основания равна a. Вместо плоскости α рассмотрим параллельную ей плоскость CMD. Проведём к ней перпендикуляр OH из центра основания — точки O. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью MOH. Это сечение — прямоугольный равнобедренный треугольник NMG, поскольку по условию грани CMD и AMB перпендикулярны. Отрезок OH параллелен катету MN этого треугольника и равен его половине:

$$OH=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Искомый угол равен углу HCO. В прямоугольном треугольнике OHC имеем:

$$\sin\angle HCO = \frac{OH}{OC} = \frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{4\cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2};\quad \angle HCO = 30^\circ.$$

Ответ: б) 30°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x+2}+\frac{x^2-3x+16}{x^2-3x}\ge 0.$

Решение.

Сделаем замену $y=x^2-3x$. Получим

$\frac{y-2}{y+2}+\frac{y+16}{y}\ge 0;\quad \frac{y^2-2y+y^2+18y+32}{y(y+2)}\ge 0;\quad \frac{2y^2+16y+32}{y(y+2)}\ge 0;$

$\frac{2(y+4)^2}{y(y+2)}\ge 0;\quad y<-2$ и $y>0$.

Отсюда после обратной замены получаем

$x^2-3x<-2;\quad x^2-3x+2<0;\quad (x-1)(x-2)<0;\quad 1<x<2$

и $x^2-3x>0;\quad x(x-3)>0;\quad x<0$ и $x>3$.

Ответ: $(-\infty;0)$; $(1;2)$; $(3;+\infty)$.

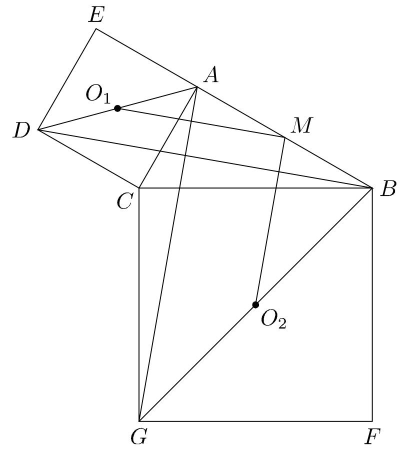
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что точка M равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника DMG, если $AC=6$, $BC=8$, $AB=10$.

Решение.



а) Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $ACDE$ и $CBFG$. Тогда MO_1 и MO_2 — средние линии треугольников ABD и ABG, поэтому достаточно доказать, что $BD=AG$.

Если $\angle ACB=90^\circ$, то

$$AG=AC+CG=BC+CD=BD.$$

Если же $\angle ACB\ne 90^\circ$, то образуются треугольники BCD и GCA, которые равны по двум сторонам ($BC=CG$, $AC=CD$) и углу между ними:

$$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=\angle ACB+90^\circ=$$
$$=\angle BCA+\angle BCG=\angle ACG.$$

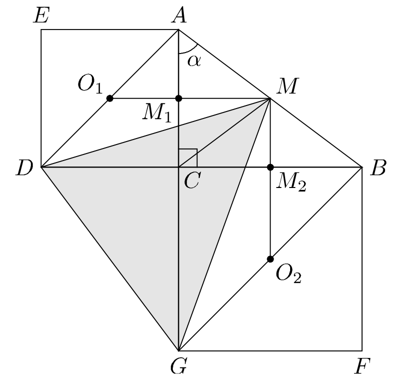
Значит, $BD=AG$.

Следовательно,

$$MO_1=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AG=MO_2.$$

б) Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, поскольку

$$AC^2+BC^2=36+64=100=AB^2.$$



Треугольник DMG состоит из трёх треугольников: DCG, DCM и GCM. Прямоугольные треугольники DCG и ACB равны по двум катетам, поэтому

$$S_{DCG}=S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24.$$

Далее,

$$S_{DCM}=\frac{1}{2}DC\cdot MM_2=\frac{1}{4}AC^2=9,$$

где M_2 — точка пересечения прямых MO_2 и BD.

Аналогично $S_{GCM}=\frac{1}{4}BC^2=16$.

Поэтому $S_{DMG}=24+9+16=49$.

Ответ: б) 49.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение.

В январе 2020 года долг будет составлять $1{,}3S$ млн рублей, а в июле 2020 года — $0{,}6S$ млн рублей. Значит, выплата в 2020 году составит $0{,}7S$ млн рублей.

В январе 2021 года долг будет составлять $1{,}3\cdot 0{,}6S = 0{,}78S$ млн рублей, а в июле 2021 года — $0{,}25S$ млн рублей. Значит, выплата в 2021 году составит $0{,}53S$ млн рублей.

В январе 2022 года долг перед банком составит $1{,}3\cdot 0{,}25S = 0{,}325S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2022 году составит $0{,}325S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0{,}7S < 5, \\ 0{,}53S < 5, \\ 0{,}325S < 5, \end{cases} \quad \text{откуда } S < \frac{50}{7}.$$

Наибольшее целое решение этой системы — 7.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1;1)$.

Решение.

Сделаем замену $y = ax - x^2$.

Получаем

$$4y+\frac{1}{y}+4=0;\quad \frac{4y^2+4y+1}{y}=0;\quad \frac{(2y+1)^2}{y}=0;\quad y=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x^2-ax-\frac{1}{2}=0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2+2>0$, поэтому оно при всех значениях a имеет ровно два различных корня. Положим $f(x)=x^2-ax-\frac{1}{2}$. Так как $f(0)=-\frac{1}{2}<0$, оба корня уравнения $f(x)=0$ принадлежат промежутку $[-1;1)$ тогда и только тогда, когда $f(-1)\ge 0$ и $f(1)>0$, то есть когда $1+a-\frac{1}{2}\ge 0$ и $1-a-\frac{1}{2}>0$. Значит, уравнение $4(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1;1)$ при $-0,5\le a<0,5$.

Ответ: $-0,5\le a<0,5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=0,5$ и / или исключением точки $a=-0,5$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков $(-\infty;0,5)$ или $(-0,5;+\infty)$, возможно, с включением точек $a=-0,5$ и / или $a=0,5$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию квадратного уравнения $x^2-ax-\frac{1}{2}=0$, дальнейшее решение неверно или отсутствует	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ являются натуральными числами.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+2a_3b_3=4a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1+a_4b_4=3a_2b_2$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1+a_4b_4\le 210$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 2, 3, 4, ... и 2, 3, 4, ... Для этих прогрессий имеем $a_1b_1+2a_3b_3=2\cdot2+2\cdot4\cdot4=36=4\cdot3\cdot3=4a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий (a_n) и (b_n) соответственно. Тогда

$$2a_1b_1+a_4b_4=2a_1b_1+(a_1+3c)(b_1+3d)=3a_1b_1+3a_1d+3b_1c+9cd,$$

$$3a_2b_2=3(a_1+c)(b_1+d)=3a_1b_1+3a_1d+3b_1c+3cd \text{ и}$$

$$2a_1b_1+a_4b_4-3a_2b_2=6cd.$$

Если $2a_1b_1+a_4b_4=3a_2b_2$, то $cd=0$. Получаем противоречие, ведь по условию $c\ge1$ и $d\ge1$.

в) По условию $c\ge1$ и $d\ge1$. В ходе решения пункта *б* мы получили, что

$$2a_1b_1+a_4b_4-3a_2b_2=6cd.$$

Значит,

$$a_2b_2=\frac{2a_1b_1+a_4b_4-6cd}{3}\le\frac{210-6}{3}=68.$$

Покажем, что случай $a_2b_2=68$ возможен. Это равенство выполняется, например, для прогрессий 3, 4, 5, 6,... и 16, 17, 18, 19,... Для них $2a_1b_1+a_4b_4=210$ и $a_2b_2=4\cdot17=68$.

Ответ: а) Например, 2, 3, 4, ... и 2, 3, 4, ...; б) нет; в) 68.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4