

Диагностическая работа №3 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

24 января 2019 года

Вариант МА10310

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!**Часть 1**

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

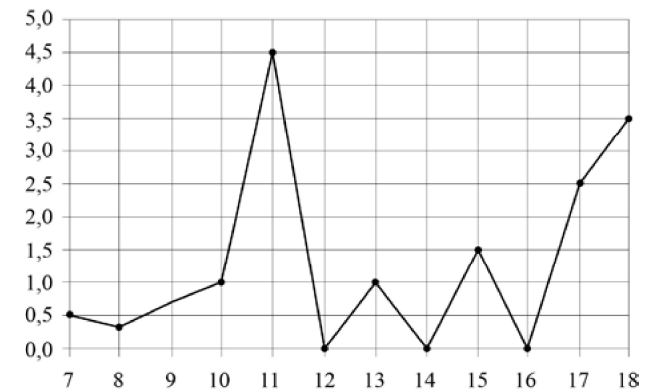
1

В доме, где живёт Маша, 9 этажей и несколько подъездов. В каждом подъезде на каждом этаже находится по 3 квартиры. Маша живёт в квартире № 96. В каком подъезде находится квартира Маши?

Ответ: _____.

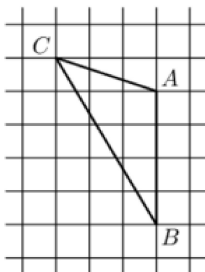
2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней в этот период выпадало более 2 миллиметров осадков.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .



Ответ: _____.

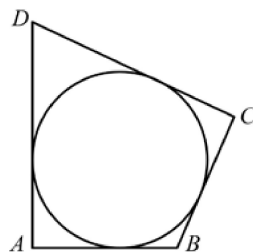
- 4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 14 сумок из 200 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $2^{1-3x} = 16$.

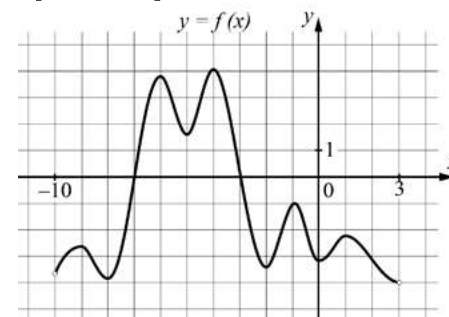
Ответ: _____.

- 6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $CD = 29$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



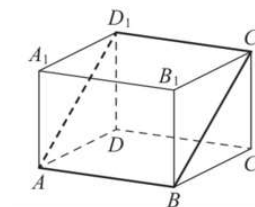
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-7, 5; -2, 5]$.



Ответ: _____.

- 8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 6$, $AD = 5$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{50} \cos^2 \frac{11\pi}{8} - \sqrt{50} \sin^2 \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$.

Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2800 Н, масса автомобиля — 2100 кг, путь — 150 м.

Ответ: _____.

- 11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 6 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 63 км/ч, и через 45 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 169}{x}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- 14 В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α , параллельная ребру MD .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MC .
б) Найдите угол между плоскостью α и прямой BD .

15 Решите неравенство $\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 24}{x^2 - 4x} \geq 0$.

- 16 На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB .

- а) Докажите, что точка M равноудалена от центров квадратов.
б) Найдите площадь треугольника DMG , если $AC = 30$, $BC = 40$, $AB = 50$.

- 17** В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $(-2; 2]$.

- 19** Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ являются натуральными числами.
- а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$.
 - б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
 - в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Ответы на тренировочные варианты 10309-10312 (профильный уровень) от 24.01.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10309	3	2	3	0,92	- 1	198	2	30	- 4	30	59	9
10310	4	3	2	0,93	- 1	102	3	78	- 5	15	55	13
10311	152	3	6	0,25	- 4	16	0,5	2500	- 77	0,18	8	36
10312	102	2	4	0,25	- 7	29	0,5	1225	- 34	0,05	5	25

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- 13 а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} \log_2(\sin x)(\log_2(\sin x) + 1) = 0, \\ 2\cos x + \sqrt{3} \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $y = \log_2(\sin x)$.

Получаем

$$y(y+1) = 0, \text{ откуда } y = 0 \text{ или } y = -1.$$

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x) = 0$ или $\log_2(\sin x) = -1$, то есть

$$\sin x = 1 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2} \text{ при условии } \cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

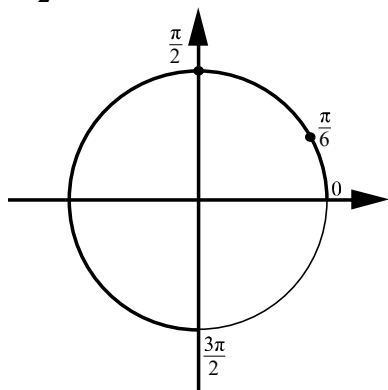
$$\text{Если } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ то } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Числа } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ не удовлетворяют условию } \cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Если } \sin x = 1, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$\text{Получим } x = \frac{\pi}{6} \text{ или } x = \frac{\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

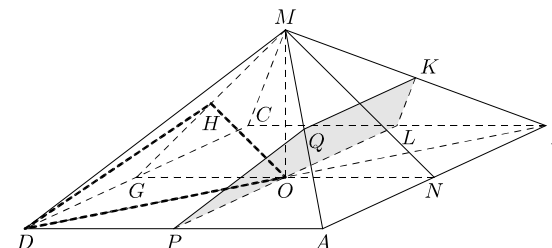
14

В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α , параллельная ребру MD .

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MC .

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой BD .

Решение.



а) Пусть точка Q — середина ребра MA , а точка K — середина ребра MB . Плоскость α пересекает грань AMD по отрезку QP (точка P лежит на ребре AD), параллельному ребру MD . Ребро CD параллельно ребру AB , а ребро AB параллельно отрезку QK . Следовательно, плоскость α параллельна плоскости грани CMD . Поэтому прямая MC параллельна плоскости α .

б) Пусть длина стороны основания равна a . Вместо плоскости α рассмотрим параллельную ей плоскость CMD . Проведём к ней перпендикуляр OH из центра основания — точки O . Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью MON . Это сечение — прямоугольный равнобедренный треугольник NMG , поскольку по условию грани CMD и AMB перпендикулярны. Отрезок OH параллелен катету MN этого треугольника и равен его половине:

$$OH = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Искомый угол равен углу HDO . В прямоугольном треугольнике OHD имеем:

$$\sin \angle HDO = \frac{OH}{OD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \quad \angle HDO = 30^\circ.$$

Ответ: б) 30° .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b , возможно, с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 24}{x^2 - 4x} \geq 0$.

Решение. Сделаем замену $y = x^2 - 4x$. Получим

$$\frac{y-3}{y+3} + \frac{y+24}{y} \geq 0; \quad \frac{y^2 - 3y + y^2 + 27y + 72}{y(y+3)} \geq 0; \quad \frac{2y^2 + 24y + 72}{y(y+3)} \geq 0;$$

$$\frac{2(y+6)^2}{y(y+3)} \geq 0; \quad y < -3 \text{ и } y > 0.$$

Отсюда после обратной замены получаем

$$x^2 - 4x < -3; \quad x^2 - 4x + 3 < 0; \quad (x-1)(x-3) < 0; \quad 1 < x < 3$$

$$\text{и } x^2 - 4x > 0; \quad x(x-4) > 0; \quad x < 0 \text{ и } x > 4.$$

Ответ: $(-\infty; 0); (1; 3); (4; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFG$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что точка M равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника DMG , если $AC = 30$, $BC = 40$, $AB = 50$.

Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $ACDE$ и $CBFG$. Тогда MO_1 и MO_2 — средние линии треугольников ABD и ABG , поэтому достаточно доказать, что $BD = AG$.

Если $\angle ACB = 90^\circ$, то

$$AG = AC + CG = BC + CD = BD.$$

Если же $\angle ACB \neq 90^\circ$, то образуются треугольники BCD и GCA , которые равны по двум сторонам ($BC = CG$, $AC = CD$) и углу между ними:

$$\angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = \angle ACB + 90^\circ =$$

$$= \angle BCA + \angle BCG = \angle ACG.$$

Значит, $BD = AG$.

Следовательно,

$$MO_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AG = MO_2.$$

б) Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C , поскольку

$$AC^2 + BC^2 = 900 + 1600 = 2500 = AB^2.$$

Треугольник DMG состоит из трёх треугольников: DCG , DCM и GCM . Прямоугольные треугольники DCG и ACB равны по двум катетам, поэтому

$$S_{DCG} = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600.$$

Далее,

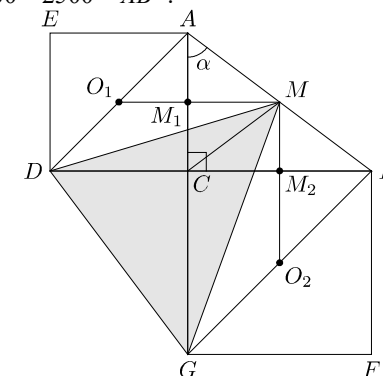
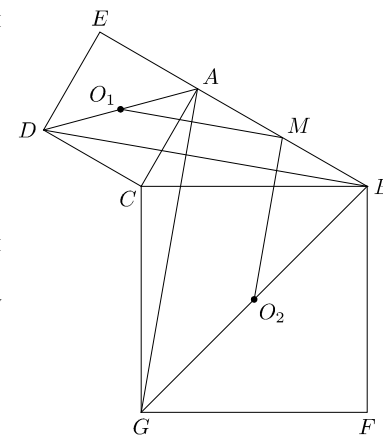
$$S_{DCM} = \frac{1}{2}DC \cdot MM_2 = \frac{1}{4}AC^2 = 225,$$

где M_2 — точка пересечения прямых MO_2 и BD .

$$\text{Аналогично } S_{GCM} = \frac{1}{4}BC^2 = 400.$$

$$\text{Поэтому } S_{DMG} = 600 + 400 + 225 = 1225.$$

Ответ: б) 1225.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

Решение. В январе 2020 года долг будет составлять $1,15S$ млн рублей, а в июле 2020 года — $0,8S$ млн рублей. Значит, выплата в 2020 году составит $0,35S$ млн рублей.

В январе 2021 года долг будет составлять $1,15 \cdot 0,8S = 0,92S$ млн рублей, а в июле 2021 года — $0,5S$ млн рублей. Значит, выплата в 2021 году составит $0,42S$ млн рублей.

В январе 2022 года долг перед банком составит $1,15 \cdot 0,5S = 0,575S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2022 году составит $0,575S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0,35S < 4, \\ 0,42S < 4, \\ 0,575S < 4, \end{cases} \quad \text{откуда } S < \frac{160}{23}.$$

Наибольшее целое решение этой системы — 6.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $(-2; 2]$.

Решение. Сделаем замену $y = ax - x^2$.

Получаем

$$y + \frac{1}{y} + 2 = 0; \quad \frac{y^2 + 2y + 1}{y} = 0; \quad \frac{(y+1)^2}{y} = 0; \quad y = -1.$$

Следовательно, $x^2 - ax - 1 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2 + 4 > 0$, поэтому оно при всех значениях a имеет ровно два различных корня. Положим $f(x) = x^2 - ax - 1$. Так как $f(0) = -1 < 0$, оба корня уравнения $f(x) = 0$ принадлежат промежутку $(-2; 2]$ тогда и только тогда, когда $f(-2) > 0$ и $f(2) \geq 0$, то есть когда $4 + 2a - 1 > 0$ и $4 - 2a - 1 \geq 0$. Значит, уравнение $(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 2 = 0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-2; 2)$ при $-1,5 < a \leq 1,5$.

Ответ: $-1,5 < a \leq 1,5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = -1,5$ и/или исключением точки $a = 1,5$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков $(-\infty; 1,5)$ или $(-1,5; +\infty)$, возможно, с включением точек $a = -1,5$ и/или $a = 1,5$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию квадратного уравнения $x^2 - ax - 1 = 0$, дальнейшее решение неверно или отсутствует	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19** Все члены возрастающих арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ являются натуральными числами.
- а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$.
- б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
- в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$ Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий (a_n) и (b_n) соответственно. Тогда

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd,$$

$$3a_3b_3 = 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd \text{ и}$$

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Получаем противоречие, ведь по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$.

в) По условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. В ходе решения пункта б мы получили, что

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Покажем, что случай $a_3b_3 = 98$ возможен. Это равенство выполняется, например, для прогрессий $5, 6, 7, 8, \dots$ и $12, 13, 14, 15, \dots$ Для них $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 300$ и $a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98$.

Ответ: а) Например, $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4