

Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

13 марта 2019 года

Вариант МА10409

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!**Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

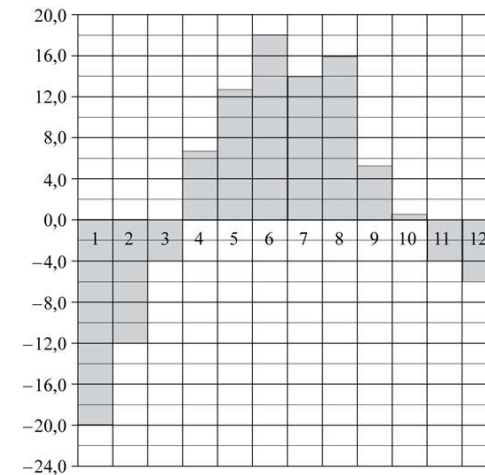
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Бегун пробежал 126 м за 18 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

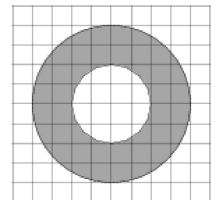
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой в 1973 году.



Ответ: _____.

- 3** На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: _____.

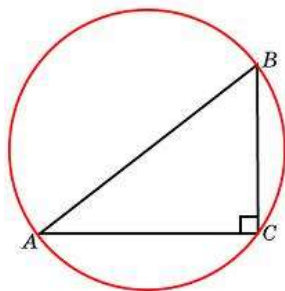
- 4 В группе 16 учащихся, среди них два друга — Михаил и Олег. Группу случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Олег окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $9^{2+5x} = 1,8 \cdot 5^{2+5x}$.

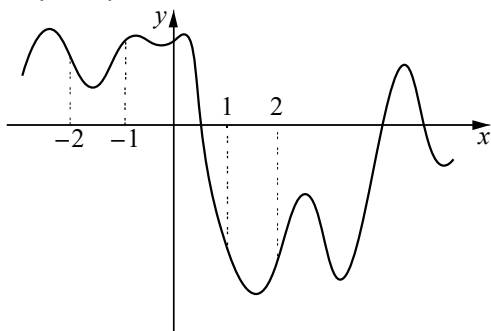
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 7$, $BC = \sqrt{15}$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2 , -1 , 1 , 2 . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

- 8 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, боковое ребро равно 16. Найдите объём пирамиды.

Ответ: _____.

Часть 2

- 9 Найдите $\log_a \frac{a^2}{b^5}$, если $\log_a b = -7$.

Ответ: _____.

- 10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на холме, видит горизонт на расстоянии 8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 11,2 километров?

Ответ: _____.

- 11 Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 90 км/ч, а последнюю — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 225}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x$.
- б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

- 15 Решите неравенство $|x+1| - \frac{6}{|x+1|} \leq 5$.

- 16 Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 30$, $BC = 40$ и $AB = 50$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L , M — середина BC , AP — биссектриса треугольника ABC , O — центр описанной около него окружности.
- а) Докажите, что P — середина отрезка LM .
- б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K , а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

- 17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

- 19 а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.
- б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?
- в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Ответы на тренировочные варианты 10409-10412 (профильный уровень) от 13.03.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10409	25,2	7	48	0,2	- 0,2	4	2	768	37	4,8	60	15
10410	28,8	5	10	0,3	0,2	17	2	324	46	4,4	75	13
10411	25000	14	17	0,0673	115	2,4	24	90	8	15	288	15
10412	30000	9	12	0,0294	87	4,8	17	63	9	45	768	20

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- 13 а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x$.
- б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

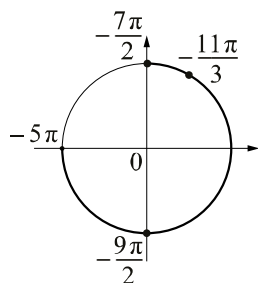
Запишем исходное уравнение в виде

$$\begin{aligned}\sin\left(x + x + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x; \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x &= \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x; \\ \cos x\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right) &= 0.\end{aligned}$$

Значит, $\cos x = 0$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

- б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{9\pi}{2}, -\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{2}, -\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

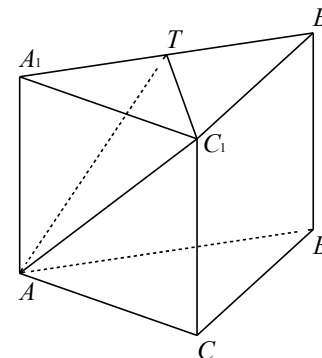
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.
- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение.

- а) Найдём стороны треугольника ATC_1 :

$$\begin{aligned}AT &= \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}, \\ TC_1 &= \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}, \\ AC_1 &= \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}.\end{aligned}$$



Заметим, что

$$AC_1^2 = 72 = 45 + 27 = AT^2 + TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

- б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT , угол A_1TA искомый. Найдём тангенс угла A_1TA :

$$\operatorname{tg} \angle A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: б) $\arctg 2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Верно доказан пункт a . ИЛИ Верно решён пункт b при отсутствии обоснований в пункте a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $|x+1| - \frac{6}{|x+1|} \leq 5$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{|x+1|^2 - 5|x+1| - 6}{|x+1|} \leq 0; \quad \frac{(|x+1|+1)(|x+1|-6)}{|x+1|} \leq 0;$$

$$|x+1| - 6 \leq 0 \quad \text{при условии } x \neq -1.$$

Решение неравенства: $-7 \leq x < -1$, $-1 < x \leq 5$.

Ответ: $[-7; -1); (-1; 5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 30$, $BC = 40$ и $AB = 50$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L , M — середина BC , AP — биссектриса треугольника ABC , O — центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что P — середина отрезка LM .

б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K , а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

Решение.

а) Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C . Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника с катетом AC , r — радиус этой окружности. Тогда $CDIL$ — квадрат, поэтому

$$CL = IL = r = \frac{AC + BC - AB}{2} = 10.$$

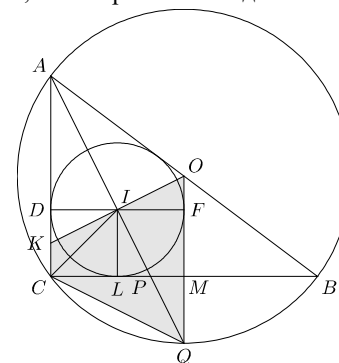
По свойству биссектрисы треугольника $CP : PB = AC : AB = 3 : 5$, поэтому

$$CP = \frac{3}{8} BC = 15.$$

Значит,

$$LP = CP - CL = 5, \quad PM = CM - CP = 5.$$

Следовательно, $LP = PM$, что и требовалось доказать.



б) Центр O окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы, а так как точка Q — середина дуги BC описанной окружности этого треугольника, точки Q , M и O лежат на серединном перпендикуляре к катету BC .

Пусть F — проекция точки I на среднюю линию OM треугольника ABC . Тогда

$$OF = OM - FM = OM - IL = 5,$$

$$OI = \sqrt{OF^2 + IF^2} = \sqrt{OF^2 + LM^2} = 5\sqrt{5}.$$

Отрезок CI — биссектриса треугольника ACP , поэтому $AI : IP = AC : CP = 2 : 1$. Значит,

$$AI = \frac{2}{3} AP = \frac{2}{3} \sqrt{AC^2 + CP^2} = 10\sqrt{5}.$$

Треугольник AIO прямоугольный с прямым углом при вершине I , так как

$$AO^2 = 625 = 125 + 500 = (5\sqrt{5})^2 + (10\sqrt{5})^2 = OI^2 + AI^2,$$

поэтому отрезок AI перпендикулярен отрезку OK , то есть биссектриса AI треугольника OAK является его высотой. Значит, $OA = OK = 25$.

Четырёхугольник $OKCQ$ — трапеция с основаниями $CK = AC - AK = 5$, $OQ = OA = OB = 25$ и высотой $CM = \frac{1}{2}BC = 20$. Следовательно,

$$S_{OKCQ} = \frac{CK + OQ}{2} \cdot CM = 300.$$

(Примечание. Доказательство того, что отрезок AI перпендикулярен отрезку OK , может быть таким. Середина L отрезка CM — проекция точки I на прямую BC , а отрезок CM — проекция отрезка AQ на эту прямую. Значит, I — середина хорды AQ описанной окружности треугольника ABC . Следовательно, отрезок AI перпендикулярен отрезку OK .)

Ответ: б) 300.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу 2-го года получится $1,13 \cdot 20 + n = 22,6 + n$ млн рублей, а к началу 3-го года —

$$1,13(22,6 + n) + n = 25,538 + 2,13n.$$

По условию $25,538 + 2,13n \geq 40$. Наименьшее целое решение: $n = 7$, так как при $n = 6$ неравенство уже не выполняется.

К началу 4-года имеем $1,13 \cdot 40,448 + m$ млн рублей, а в конце проекта —

$$1,13(1,13 \cdot 40,448 + m) + m = 1,2769 \cdot 40,448 + 2,13m = 51,6480512 + 2,13m.$$

По условию $51,6480512 + 2,13m \geq 60$. Наименьшее целое решение: $m = 4$.

Ответ: 7 и 4 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Решение.

Число $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a . Поэтому уравнение равносильно уравнению

$$a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}.$$

Рассмотрим функцию

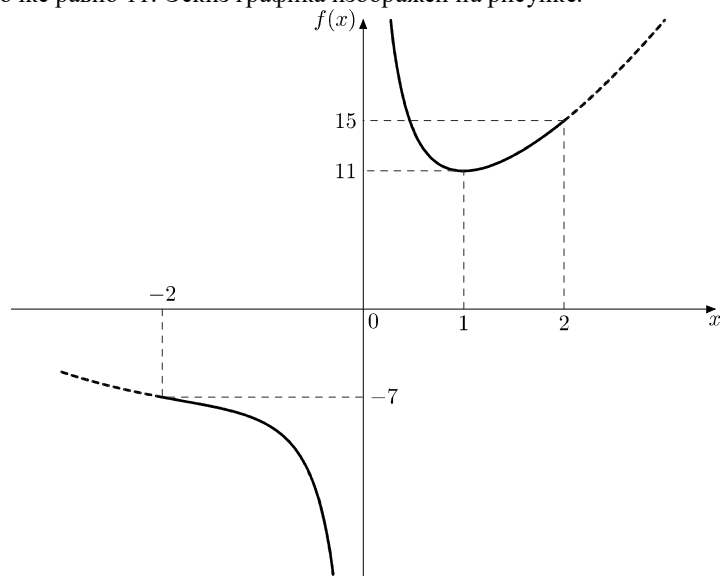
$$f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$$

и исследуем её поведение на отрезке $-2 \leq x \leq 2$. Функция определена при всех $x \neq 0$. Найдём производную:

$$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает.

Следовательно, точка $x=1$ — единственная точка минимума, значение в этой точке равно 11. Эскиз графика изображён на рисунке.



Найдем значения функции в концах отрезка: $f(-2) = -7$ и $f(2) = 15$.

Поэтому

- если $a \leq -7$, то график функции $y = f(x)$ и прямая $y = a$ имеют единственную общую точку при $-2 \leq x < 0$;
- если $-7 < a < 11$ общих точек нет;
- если $a = 11$ линии имеют единственную общую точку $(1; 11)$;
- если $11 < a \leq 15$, то линии имеют две различные общие точки при $0 < x \leq 2$;
- если $a > 15$, то линии имеют одну общую точку при $0 < x \leq 2$ и ещё одну при $x > 2$.

Ответ: $a \leq -7$, $a = 11$ и $a > 15$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

- а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.
- б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?
- в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Решение.

а) 105; 3; 35; 21; 5.

б) Нет. Каждое число в круге должно являться делителем числа 300. Поскольку $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, делителей всего $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, включая 1 и 300. Наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел должно равняться 300, поэтому рядом с числом 1 может стоять только 300 и число 1 не может находиться в круге. Среди делителей числа 300 есть 6 делителей, кратных 2 и не кратных 4, 6 делителей, кратных 5 и не кратных 25, и 2 делителя, кратных 10 и не кратных 100. Поэтому 10 чисел среди делителей числа 300 кратны 2 или 5 и не кратны их квадратам. Среди 8 чисел, выписанных в круг, не будет числа 1, поэтому там будет хотя бы одно число, кратное 2 или 5 и не кратное их квадратам. Рядом с таким числом с обеих сторон будут стоять числа, кратные тому же простому числу (2 или 5), поэтому наибольший общий делитель этих трёх подряд идущих чисел будет больше 1.

в) Каждое число, выписанное в круг, обязано быть делителем числа 60. У числа $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ всего 12 делителей, считая 60 и 1. Среди этих делителей есть простое число 2, на квадрат которого делится 60. Рядом с числом 2 может стоять только число 60, чтобы их наименьшее общее кратное равнялось 60 (число, стоящее рядом с 2, должно делиться и на 4, и на 3, и на 5), поэтому число 2 не может быть написано. Рядом с числами 5 и 10 могут быть написаны только числа 12 и 60, поэтому если в круге больше 4 чисел, то 5 и 10 не могут одновременно находиться в круге. Аналогично 3 и 6 не могут быть написаны одновременно, поскольку рядом с ними могут быть написаны только числа 20 и 60. Значит, всего может быть выписано в круг не более 8 чисел. Пример чисел 60; 6; 20; 30; 4; 15; 12; 10 показывает, что наибольшее искомое количество чисел равно 8.

Ответ: а) Например, 105; 3; 35; 21; 5; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a , b и c	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a и b , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах a и c	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте b , пункты a и c не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте c , пункты a и b не решены	2
Приведён пример в пункте a , пункты b и c не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4