

Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10 – 11 класс
 17 мая 2019 года
 Вариант МА00509
 (профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

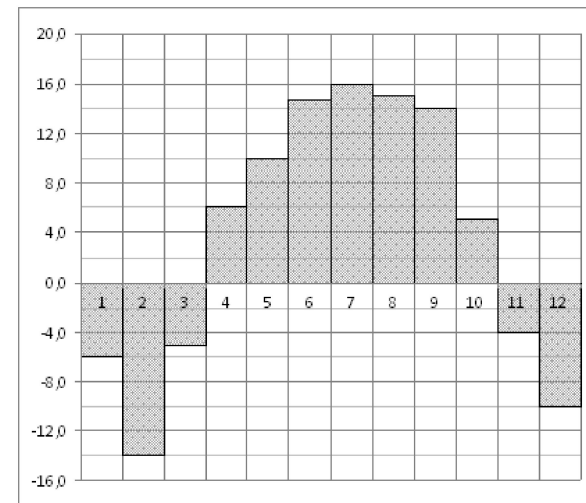
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

- 1** В школе 400 учеников, из них 30 % — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 35 % изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

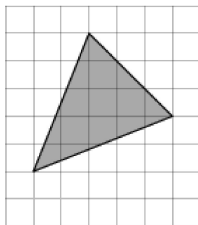
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха во Владимире за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме количество месяцев в 1994 году, в которых среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия.



Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 .



Ответ: _____.

- 4 На склад поступили насосы. В среднем, на каждые 1986 исправных насосов приходится 14 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

Ответ: _____.

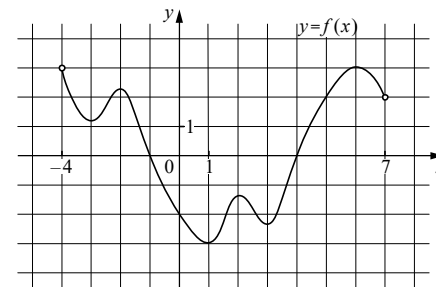
- 5 Найдите корень уравнения $\log_6(3+x) = \log_6 11$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 1, катет BC равен $\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла A .

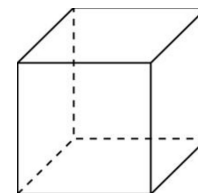
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-3; 6]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

- 8 Площадь поверхности куба равна 648. Найдите его диагональ.



Ответ: _____.

- 9 Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{8 - \sqrt{15}}$.

Ответ: _____.

- 10** В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 40$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормальной работы электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 15 Ом. Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- 11** Байдарка в 7:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 40 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость байдарки равна 6 км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 27x + 5$.

Ответ: _____.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

- 13** а) Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3} \cos(2\pi - x)$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
- 14** В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
 а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
 б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC , если $AB = 12$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

- 15** Решите неравенство $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \frac{2}{3} \cdot 2,5^{x - \frac{3}{x+1}}$.

- 16** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D .
 а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.
 б) Найдите площадь треугольника BED , если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

- 17** 15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
 - выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых любое число x из отрезка $[3; 5]$ является решением уравнения $|x - a - 6| + |x + a + 4| = 2a + 10$.

- 19**
- а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n , что десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается всеми цифрами числа n , записанными в том же порядке.
 - б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?
 - в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Ответы на тренировочные варианты 00509-00512 (профильный уровень) от 17.05.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
00509	98	7	10,5	0,007	8	1	1	18	6	24	3	- 3
00510	156	4	17	0,008	3	0,75	- 6	6	2	10	1	- 5
00511	14625	- 12	27	0,12	- 9	25	6	9000	5	5	74	- 3
00512	16320	- 15	24,5	0,14	- 5	15	2	720	4	4,5	49	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

- а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos(2\pi - x)$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Решение.

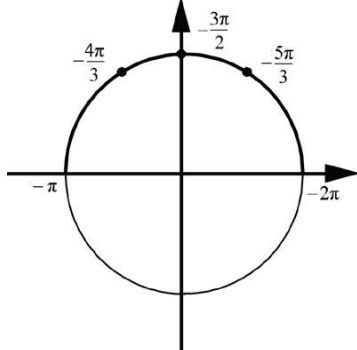
а) Преобразуем уравнение:

$$-2\cos x \cdot (-\sin x) = \sqrt{3}\cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - \sqrt{3}) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ или } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ или } x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

- б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.



Получаем $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

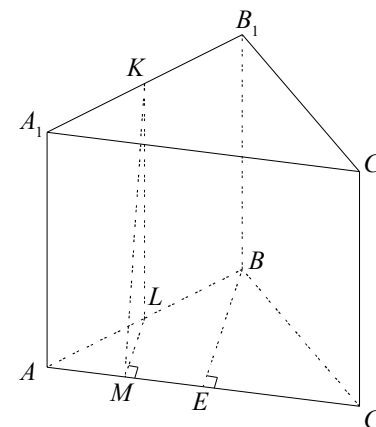
14

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

- а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
- б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC , если $AB=12$, $AC=16$ и $AA_1=6$.

Решение.

а) Пусть L — середина ребра AB , E — середина ребра AC . Так как треугольник ABC равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC . Поскольку $AM:MC=1:3$, имеем $AM=ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB . Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC . Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC , получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM , а значит, KM перпендикулярно AC .



- б) Отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC и отрезок KM перпендикулярен отрезку AC , поэтому искомый угол равен углу LMK .

Имеем $KL = AA_1 = 6$; $ML = \sqrt{AL^2 - AM^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle LMK = \frac{LK}{LM} = \frac{6}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> , возможно, с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \frac{2}{3} \cdot 2,5^{x-\frac{3}{x+1}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \frac{2}{3}.$$

Значит, $\frac{x^2+x-3}{x+1} \geq 1$, то есть $\frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \geq 0$, откуда $-2 \leq x < -1$ или $x \geq 2$.

Ответ: $[-2; -1); [2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

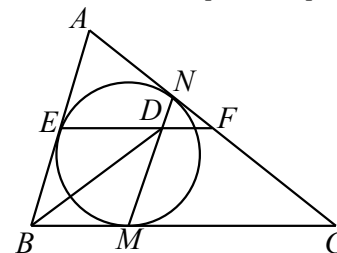
Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D .

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED , если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение.

а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN , следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.



б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2}, \quad CF = \frac{b}{2}, \quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a \leq c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Следовательно, } S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $25\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
— выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

Решение.

Пусть S_n — сумма, которую Алексей выплачивает в n -м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда

$S_1 = 1,5 \cdot k - 1,2$ (изначальный долг в 1,5 млн рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счете должно остаться 1,2 млн рублей).

Аналогично

$S_2 = 1,2 \cdot k - 1$; $S_3 = 1 \cdot k - 0,7$; $S_4 = 0,7 \cdot k - 0,5$; $S_5 = 0,5 \cdot k - 0,3$; $S_6 = 0,3 \cdot k$.

Общая сумма выплат S составляет

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 5,2k - 3,7.$$

Вспомним, что $k = 1 + \frac{r}{100}$, и решим неравенство:

$$5,2 + \frac{5,2r}{100} - 3,7 > 2,2; \quad \frac{5,2r}{100} > 0,7; \quad r > \frac{175}{13}.$$

Наименьшее целое решение: $r = 14$.

Ответ: 14.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых любое число x из отрезка $[3; 5]$ является решением уравнения $|x - a - 6| + |x + a + 4| = 2a + 10$.

Решение.

Если $2a + 10 < 0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a = -5$. Тогда уравнение имеет вид $|x - 1| + |x - 1| = 0$ и ни одно число из отрезка $[3; 5]$ не является его решением.

Пусть $a > -5$. Запишем уравнение в виде

$$|x - (a + 6)| + |x - (-a - 4)| = 2a + 10.$$

При $a > -5$ верно неравенство $-a - 4 < a + 6$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a - 4, a + 6]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a + 6) - (-a - 4) = 2a + 10$ и уравнению удовлетворяют те и только те точки x , сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a + 6$ и $x = -a - 4$ равна $2a + 10$.

Осталось выбрать те значения a , при каждом из которых отрезок $[-a - 4, a + 6]$ содержит отрезок $[3; 5]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a - 4 \leq 3, \\ a + 6 \geq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -7, \\ a \geq -1, \end{cases} \quad \text{откуда } a \geq -1.$$

Ответ: $a \geq -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение или исключена точка $a = -1$	3

Получен ответ $a \geq -1$, но решение недостаточно обосновано или не доказано отсутствие других возможных значений a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения в зависимости от a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 19** а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n , что десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается всеми цифрами числа n , записанными в том же порядке.
 б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?
 в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Решение.

а) Например, число 9.

б) Предположим, что $n = 10k + 3$. Тогда

$$n^2 + 2n = 100k^2 + 60k + 9 + 20k + 6 = 10l + 15,$$

то есть десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2 + 2n = n + N \cdot 10000$, преобразуем:

$$n^2 + n = N \cdot 10000, \text{ т. е. } n \cdot (n+1) = 2^4 \cdot 5^4 \cdot N.$$

Заметим, что n и $n+1$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4 . Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число $n+1$ делится на 10000, а число n четырёхзначное, то есть $n = 9999$.

Если $n \neq 9999$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 1.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Из них только число 9375 имеет вид $16k - 1$, а чисел вида $16k + 1$ среди них нет.

Значит, искомое число может равняться 9375 или 9999.

Ответ: а) 9; б) нет; в) 9375; 9999.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a , b и v	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a и b , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах a и v	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте b , пункты a и v не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте v , пункты a и b не решены	2
Приведён пример в пункте a , пункты b и v не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4