Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10 – 11 класс
17 мая 2019 года
Вариант МА00510
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

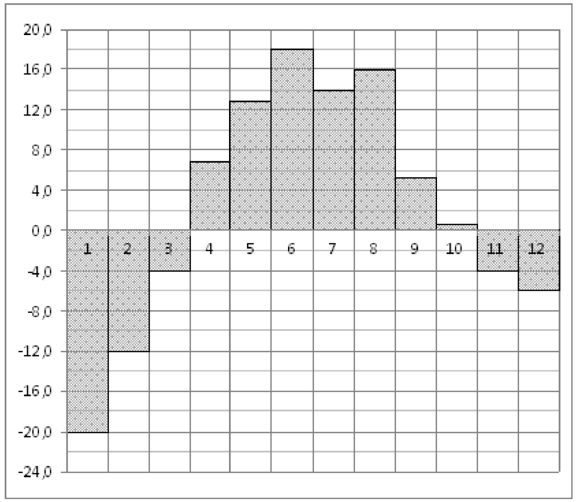
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 В школе 800 учеников, из них 35 % — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 30 % изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

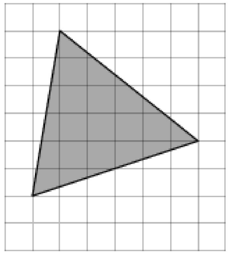
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Тюмени за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме количество месяцев в 1973 году, в которых среднемесячная температура превышала 10 градусов Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



Ответ: ___________________________.

4 На склад поступили насосы. В среднем, на каждые 496 исправных насосов приходится 4 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

Ответ: ___________________________.

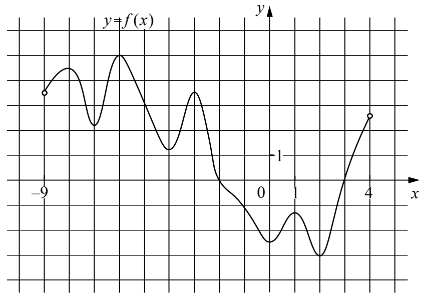
5 Найдите корень уравнения $\log_5(1+x)=\log_5 4$.

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, высота CH равна 8, катет BC равен 10. Найдите тангенс угла A.

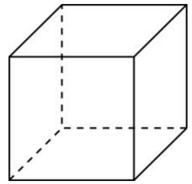
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. В какой точке отрезка $[-8;3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 Площадь поверхности куба равна 72. Найдите его диагональ.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{12}+\sqrt{2}\right)^2}{7+\sqrt{24}}$.

Ответ: ___________________________.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г.

10 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормальной работы электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

Ответ: ___________________________.

11 Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 15 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 14:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость лодки равна 11 км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 14$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\sin(\pi - x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

15 Решите неравенство $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \geq \dfrac{2}{3} \cdot 3{,}5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$.

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60°$.

17 15 января Андрей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,2 млн рублей. Условия его возврата следующие:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
— выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей.

Дата	15.02	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,2	1	0,8	0,6	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение r, при котором Андрею в общей сумме придётся выплатить больше 1,7 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое число x из отрезка $[3; 4]$ является решением уравнения $|x-a-5|+|x+a+1|=2a+6$.

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.
б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?
в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Ответы на тренировочные варианты 00509-00512 (профильный уровень) от 17.05.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
00509	98	7	10,5	0,007	8	1	1	18	6	24	3	- 3
00510	156	4	17	0,008	3	0,75	- 6	6	2	10	1	- 5
00511	14625	- 12	27	0,12	- 9	25	6	9000	5	5	74	- 3
00512	16320	- 15	24,5	0,14	- 5	15	2	720	4	4,5	49	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\sin(\pi-x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi]$.

Решение.

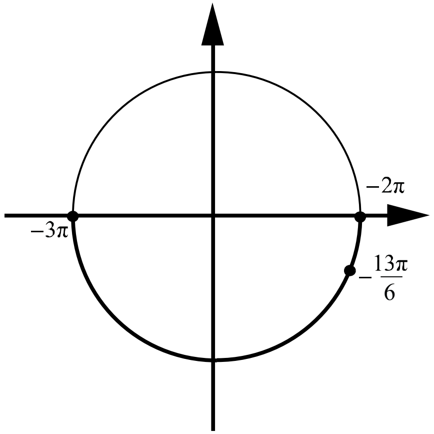
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos x\cdot\sin x=\sqrt{3}\sin x;\quad \sin x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi;-2\pi]$.



Получаем $-3\pi,\ -\frac{13\pi}{6},\ -2\pi$.

Ответ: а) πk; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi,\ -\frac{13\pi}{6},\ -2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

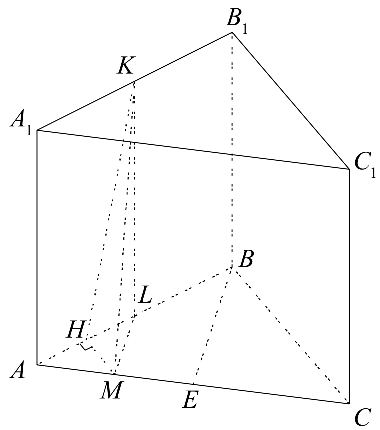
14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Решение.

а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM:MC=1:3$, имеем $AM=ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, KM перпендикулярно AC.



б) Пусть MH — высота треугольника AML. Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1, и поэтому искомый угол равен углу HKM. Вычисляя двумя способами площадь треугольника AML, получим $2S_{AML}=MH\cdot AL=MA\cdot ML$, откуда

$$MH=\frac{MA\cdot ML}{AL}=\frac{2\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

поэтому

$$\sin\angle HKM = \frac{HM}{KM} = \frac{HM}{\sqrt{3^2+\sqrt{5}^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}.$$

Ответ: б) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3}\cdot 3{,}5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}}; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3}.$$

Значит, $\frac{x^2+3x-1}{x+2} \le 1$, то есть $\frac{(x+3)(x-1)}{x+2} \le 0$, откуда $x \le -3$ или $-2 < x \le 1$.

Ответ: $(-\infty;-3]$; $(-2;1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

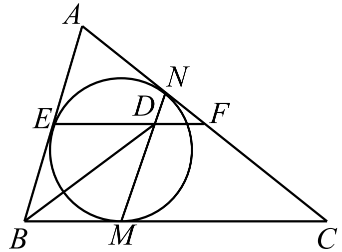
16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.

а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.



б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2},\quad CF = \frac{b}{2},\quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a \le c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180° - \angle ABC = 180° - 60° = 120°.$$

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2}BE\cdot ED\cdot\sin 120° = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}$.

Ответ: б) $49\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января Андрей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,2 млн рублей. Условия его возврата следующие:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

— выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей.

Дата	15.02	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,2	1	0,8	0,6	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение *r*, при котором Андрею в общей сумме придётся выплатить больше 1,7 млн рублей.

Решение.

Пусть S_n — сумма, которую Андрей выплачивает в n-м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда

$S_1 = 1{,}2 \cdot k - 1$ (изначальный долг в 1,2 млн рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счету должен остаться 1 млн рублей).

Аналогично

$S_2 = 1 \cdot k - 0{,}8$; $S_3 = 0{,}8 \cdot k - 0{,}6$; $S_4 = 0{,}6 \cdot k - 0{,}3$; $S_5 = 0{,}3 \cdot k - 0{,}1$; $S_6 = 0{,}1 \cdot k$.

Общая сумма выплат S составляет

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 4k - 2{,}8.$$

Вспомним, что $k = 1 + \frac{r}{100}$, и решим неравенство:

$$4 + \frac{4r}{100} - 2{,}8 > 1{,}7; \quad \frac{4r}{100} > 0{,}5; \quad r > 12{,}5.$$

Наименьшее целое решение: $r = 13$.

Ответ: 13.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое число x из отрезка $[3;4]$ является решением уравнения $|x-a-5| + |x+a+1| = 2a+6$.

Решение.

Если $2a + 6 < 0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a = -3$. Тогда уравнение имеет вид $|x-2| + |x-2| = 0$ и ни одно число из отрезка $[3, 4]$ не является его решением.

Пусть $a > -3$. Запишем уравнение в виде

$$|x-(a+5)| + |x-(-a-1)| = 2a+6.$$

При $a > -3$ верно неравенство $-a-1 < a+5$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a-1,\ a+5]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a+5)-(-a-1) = 2a+6$ и уравнению удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a+5$ и $x = -a-1$ равна $2a+6$.

Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a-1,\ a+5]$ содержит отрезок $[3, 4]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a-1\le 3, \\ a+5\ge 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge -4, \\ a\ge -1, \end{cases} \quad \text{откуда } a\ge -1.$$

Ответ: $a\ge -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение или исключена точка $a=-1$	3
Получен ответ $a\ge -1$, но решение недостаточно обосновано или не доказано отсутствие других возможных значений a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения в зависимости от a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.
б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?
в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Решение.
а) Например, число 7.
б) Предположим, что $n=10k+1$. Тогда

$$n^2+4n=100k^2+20k+1+40k+4=10l+5,$$

то есть десятичная запись числа n^2+4n оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2+4n=n+N\cdot 10000$ и преобразуем полученное уравнение:

$$n^2+3n=N\cdot 10000\text{, т. е. } n\cdot(n+3)=2^4\cdot 5^4\cdot N.$$

Числа n и $n+3$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число n четырёхзначное, а $n+3$ делится на 10000, то есть $n=9997$.
Если $n\ne 9997$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 3.
Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Среди них только 1875 имеет вид $16k+3$ и только 8125 имеет вид $16k-3$.

Значит, искомое число равняется 1872, 8125 или 9997.
Ответ: а) 7; б) нет; в) 1872; 8125; 9997.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4