Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
14 февраля 2024 года
Вариант МА2310309
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

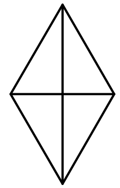
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Площадь ромба равна 30. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите длину другой диагонали.

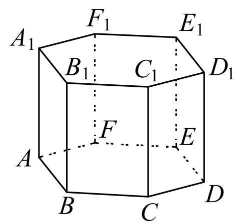


Ответ: ___________________________.

2 Длина вектора $\vec{a}$ равна $14\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135°$, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно -28. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Ответ: ___________________________.

3 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 30. Найдите тангенс угла между прямыми C_1F и AA_1.



Ответ: ___________________________.

4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,96. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,61. Найдите вероятность того, что в понедельник число пассажиров автобуса будет от 14 до 21 включительно.

Ответ: ___________________________.

5 Игральную кость бросали один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

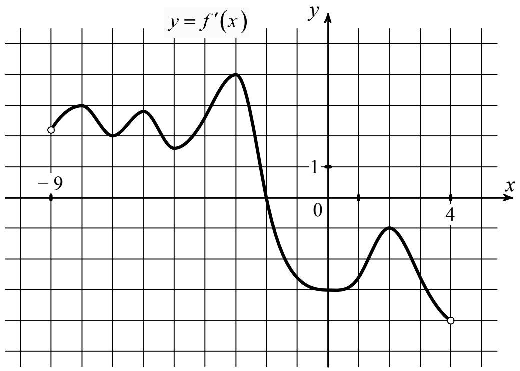
6 Найдите корень уравнения $36^{x-12}=\frac{1}{6}$.

Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения $\frac{8\left(\sin^2 71°-\cos^2 71°\right)}{\cos 142°}$.

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ___________________________.

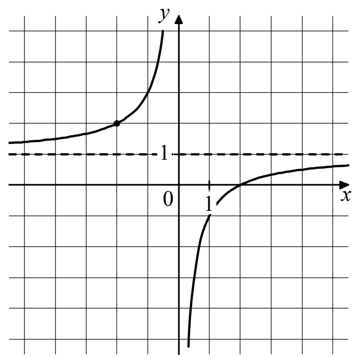
9 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1=96$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 24 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ: ___________________________.

10 На изготовление 27 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 54 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=\frac{k}{x}+a$. Найдите значение x, при котором значение функции равно 1,08.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=5x-\ln(x+5)+7$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x + 5}{9\sin^2 x - 7} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

14 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Ребро SA является высотой пирамиды. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF:FB = AE:EC = 1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точки E и F перпендикулярно прямой AC, является прямоугольником.

б) Точки H и M — точки пересечения плоскости α с прямыми AB и CS соответственно. Найдите объём многогранника $BCMEHF$, если объём пирамиды $SABC$ равен 216.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(25-25x) < \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-4x+3\right) + \log_{\frac{1}{5}}(x+7)$.

16 В июле 2024 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}6S$	$0{,}3S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждый платёж будет меньше 2,5 млн рублей.

17 В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен $60°$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 32 и $IC = 6$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_a \sqrt{21 + 4a^{2\cos x}} = 2\cos x$$

имеет хотя бы одно решение.

19 Пусть $\overline{ml}$ обозначает двузначное число, равное $10m + l$, где m и l — цифры, $m \neq 0$.

а) Существуют ли такие различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc} = 99$?

б) Существуют ли такие различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc} = 1485$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если цифры a, b, c и d различны и среди них есть цифры 4 и 6?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2310309-2310312 (профильный уровень) от 14.02.2024

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2310309	10	2	2	0,35	0,73	11,5	- 8	- 7	32	6	- 25	- 4,8
2310310	8	8	90	0,43	0,24	8,5	- 4	- 5	18	8	- 20	- 10,9
2310311	36	4	60	0,018	0,56	7	14	7	12	30	1,6	7,1
2310312	42	3	60	0,027	0,58	11	25	4	6	25	0,84	5,2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x+5}{9\sin^2 x-7}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\dfrac{11\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}3\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x+5=0,\\ 9\sin^2 x-7\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}6\cos^2 x-5\sqrt{2}\cos x+2=0,\\ \sin^2 x\neq\dfrac{7}{9}.\end{cases}$$

Получаем:

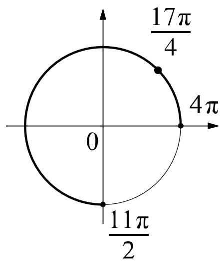
$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{3},\\ \sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}.\end{cases}$$

Для $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ не выполняется условие $\sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Для $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ условие $\sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ выполняется, находим:

$$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\ \text{или}\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\dfrac{11\pi}{2}\right]$.



Получим число $\dfrac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\dfrac{17\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

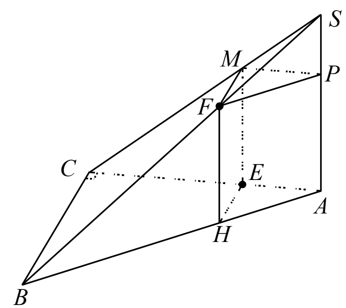
14

Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Ребро SA является высотой пирамиды. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF:FB=AE:EC=1:5$. Плоскость α проходит через точки E и F перпендикулярно прямой AC и пересекает рёбра AB и CS в точках H и M соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.

б) Найдите объём многогранника $BCMEHF$, если объём пирамиды $SABC$ равен 216.

Решение.



а) Прямые EH и BC параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны прямой AC. Поэтому треугольники AEH и ACB подобны по двум углам, $EH=\dfrac{1}{6}BC$, $AE=\dfrac{1}{6}AC$.

Плоскость α проходит через прямую EH, параллельную прямой BC. Поэтому линия пересечения плоскостей α и BSC параллельна прямой BC. Следовательно, треугольники BSC и FSM подобны по двум углам, $FM=\dfrac{1}{6}BC$, $SM=\dfrac{1}{6}SC$.

Таким образом, отрезки FM и EH равны и лежат на параллельных прямых. Следовательно, $EHFM$ — параллелограмм.

Прямая EH перпендикулярна прямой AC и лежит в плоскости ABC, перпендикулярной плоскости CSA, поэтому прямая EH перпендикулярна плоскости CSA, значит, отрезок ME перпендикулярен отрезку EH.

Таким образом, в параллелограмме $EHFM$ угол MEH прямой, поэтому параллелограм является прямоугольником.

б) Плоскость α делит пирамиду на два пятигранника $SFMAHE$ и $BCMEHF$. Пятигранник $SFMAHE$ можно разбить на пирамиду $SFMP$ и призму $FMPHEA$, где P — точка пересечения плоскости FMP, параллельной плоскости ABC, с ребром SA.

Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $SA=h$. Тогда:

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}SA\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{6}abh=216;$$

$$V_{SMFP}=\frac{1}{3}\cdot SP\cdot\frac{1}{2}\cdot MP\cdot MF=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}h\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}b\cdot\frac{1}{6}a=\frac{abh}{216\cdot 6};$$

$$V_{FMPHEA}=PA\cdot\frac{1}{2}\cdot MP\cdot MF=\frac{5}{6}h\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}b\cdot\frac{1}{6}a=\frac{5abh}{216\cdot 2}.$$

Следовательно, объём пятигранника $SFMAHE$:

$$V_{SFMAHE}=V_{SMFP}+V_{FMPHEA}=\frac{abh}{216\cdot 6}+\frac{5abh}{216\cdot 2}=\frac{16abh}{216\cdot 6}.$$

Объём пятигранника $BCMEHF$ равен разности объёмов пирамиды $SABC$ и пятигранника $SFMAHE$:

$$V_{BCMEHF}=V_{SABC}-V_{SFMAHE}=\frac{abh}{6}-\frac{16abh}{216\cdot 6}=\frac{200}{216}\cdot\frac{abh}{6}=200.$$

Ответ: б) 200.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

15 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(25-25x)<\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-4x+3\right)+\log_{\frac{1}{5}}(x+7)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{\frac{1}{5}}\big(25(1-x)\big)<\log_{\frac{1}{5}}\big((3-x)(1-x)\big)+\log_{\frac{1}{5}}(x+7);$$

$$\log_{\frac{1}{5}}25+\log_{\frac{1}{5}}(1-x)<\log_{\frac{1}{5}}(3-x)+\log_{\frac{1}{5}}(1-x)+\log_{\frac{1}{5}}(x+7).$$

Неравенство определено при $-7<x<1$, поэтому при $-7<x<1$ неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}25<\log_{\frac{1}{5}}(3-x)+\log_{\frac{1}{5}}(x+7)$$

принимает вид:

$$25>(3-x)(x+7);\ 25>21-4x-x^2;\ x^2+4x+4>0,$$

откуда $x\neq-2$. Учитывая ограничение $-7<x<1$, получаем: $-7<x<-2$; $-2<x<1$.

Ответ: $(-7;-2)$; $(-2;1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением точки -2. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 В июле 2024 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}6S$	$0{,}3S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждый платёж будет меньше 2,5 млн рублей.

Решение.

В январе 2025 года долг будет составлять $1{,}14S$ млн рублей, а в июле 2025 года — $0{,}8S$ млн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит $0{,}34S$ млн рублей.

В январе 2026 года долг будет составлять $1{,}14\cdot 0{,}8S=0{,}912S$ млн рублей, а в июле 2026 года — $0{,}6S$ млн рублей. Значит, платёж в 2026 году составит $0{,}312S$ млн рублей.

В январе 2027 года долг будет составлять $1{,}14\cdot 0{,}6S=0{,}684S$ млн рублей, а в июле 2027 года — $0{,}3S$ млн рублей. Значит, платёж в 2027 году составит $0{,}384S$ млн рублей.

В январе 2028 года долг перед банком составит $1{,}14\cdot 0{,}3S=0{,}342S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2028 году составит $0{,}342S$ млн рублей.

Наибольший платёж составляет $0{,}384S$. Решим неравенство

$$0{,}384S<2{,}5\text{, откуда } S<\frac{2500}{384}=6\frac{196}{384}.$$

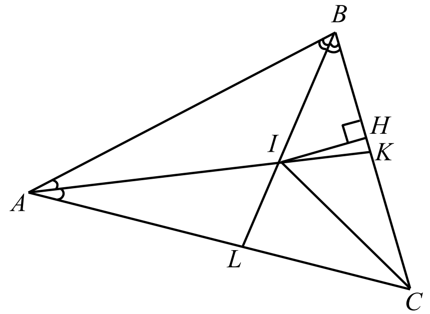
Наибольшее целое решение этого неравенства — 6.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

17 В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.
а) Докажите, что угол BCA равен $60°$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 32 и $IC=6$.

Решение.



а) Обозначим через α и β углы CAB и ABC соответственно. Тогда углы IAB и ABI равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол BIA равен $180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$. Такая же величина вертикального угла LIK.

По условию около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность. Следовательно, угол BCA дополняет угол LIK до $180°$. С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол BCA дополняет до $180°$ сумму углов α и β. Следовательно, $180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\alpha+\beta$, откуда $\alpha+\beta=120°$. Значит, угол BCA равен $60°$.

б) Поскольку точка I является точкой пересечения биссектрис AK и BL, она также лежит на биссектрисе угла BCA и является центром вписанной окружности в треугольник ABC. Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра IH, опущенного из этой точки на сторону BC.

По доказанному, угол HCI равен половине угла BCA, то есть он равен $30°$. В прямоугольном треугольнике HCI против угла в $30°$ лежит катет IH. Следовательно, $IH=\frac{1}{2}\cdot IC=3$.

Площадь треугольника ABC равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 32\cdot 3=48$.

Ответ: б) 48.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_a \sqrt{21+4a^{2\cos x}} = 2\cos x$$

имеет хотя бы одно решение.

<u>Решение.</u>

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a>0, \\ a \neq 1, \\ a^{4\cos x} - 4a^{2\cos x} - 21 = 0. \end{cases}$$

Пусть $a^{2\cos x} = t$, $t > 0$.

Поскольку $-1 \le \cos x \le 1$, для $t = \left(a^2\right)^{\cos x}$ получаем: $a^2 \le t \le \frac{1}{a^2}$ при $0 < a < 1$ и $\frac{1}{a^2} \le t \le a^2$ при $a > 1$.

Тогда уравнение принимает вид $t^2 - 4t - 21 = 0$. Оно имеет корни $t_1 = -3$ и $t_2 = 7$. Поскольку $t > 0$, корень $t_1 = -3$ исключаем.

При $0 < a < 1$ должно выполняться условие $a^2 \le 7 \le \frac{1}{a^2}$, получим:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^2 \le 7, \\ \frac{1}{a^2} \ge 7, \end{cases}$$

откуда $0 < a \le \frac{\sqrt{7}}{7}$.

При $a > 1$ должно выполняться условие $\frac{1}{a^2} \le 7 \le a^2$, получим:

$$\begin{cases} a > 1, \\ a^2 \ge 7, \\ \frac{1}{a^2} \le 7 \end{cases}$$

откуда $a \ge \sqrt{7}$.

При $0 < a \le \frac{\sqrt{7}}{7}$; $a \ge \sqrt{7}$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0 < a \le \frac{\sqrt{7}}{7}$; $a \ge \sqrt{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a = \frac{\sqrt{7}}{7}$ и / или $a = \sqrt{7}$	3
С помощью верного рассуждения получено одно из множеств $0 < a \le \frac{\sqrt{7}}{7}$ или $a \ge \sqrt{7}$ множества значений a, возможно, с исключением точек $a = \frac{\sqrt{7}}{7}$ или $a = \sqrt{7}$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Найдены корни уравнения $\left(a^{2\sin x}\right)^2 - 4a^{2\sin x} - 21 = 0$ при $a > 0$ и $a \neq 1$: $a^{2\sin x} = -3$, $a^{2\sin x} = 7$, и задача верно сведена к исследованию корней уравнений $a^{2\sin x} = -3$ и / или $a^{2\sin x} = 7$ при $a > 0$ и $a \neq 1$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 Пусть $\overline{ml}$ обозначает двузначное число, равное $10m+l$, где m и l — цифры, $m \neq 0$.

а) Существуют ли такие различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99$?

б) Существуют ли такие различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1485$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если цифры a, b, c и d различны и среди них есть цифры 4 и 6?

Решение.

а) Да. Действительно, поскольку

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=(10a+b)\cdot(10c+d)-(10b+a)\cdot(10d+c)=99\cdot(ac-bd),$$

нужно подобрать такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, чтобы $ac-bd=1$. Это верно, например, при $a=1$, $b=2$, $c=9$ и $d=4$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$. Значит, если $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1485$, то $99\cdot(ac-bd)=1485=99\cdot 15$ и $ac-bd=15$.

Поскольку одна из цифр a, b, c и d равна 5, то одно из произведений ac или bd делится на 5, а значит, и другое произведение тоже должно делиться на 5. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 5.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 4 и 6.

Если цифры 4 и 6 — это a и c, то $ac-bd \le 4\cdot 6-1\cdot 2=22$.

Если цифры 4 и 6 — это b и d, то $ac-bd \le 8\cdot 9-4\cdot 6=48$.

Если цифра 4 — это a или c, а цифра 6 — это b или d, то

$$ac-bd \le 4\cdot 9-6\cdot 1=30.$$

Если цифра 6 — это a или c, а цифра 4 — это b или d, то

$$ac-bd \le 6\cdot 9-4\cdot 1=50.$$

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$ равно $99\cdot 50=4950$, оно достигается при $a=6$, $b=4$, $c=9$ и $d=1$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $99\cdot 50=4950$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*