

**Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**20 марта 2024 года  
Вариант МА2310412  
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

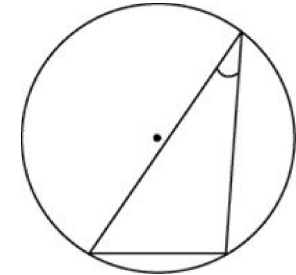
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

**Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1 Найдите хорду, на которую опирается угол  $30^\circ$ , вписанный в окружность радиусом 42.

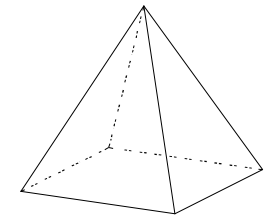


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Даны векторы  $\vec{a}(4; -5)$  и  $\vec{b}(4; 5)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 40, боковые рёбра равны 29. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей: 37 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,08 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: \_\_\_\_\_.

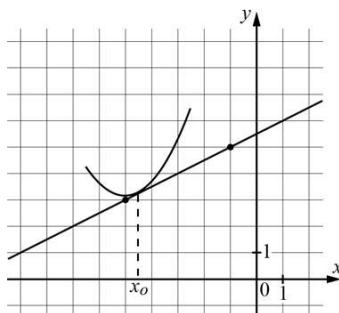
- 6 Найдите корень уравнения  $\log_3(9+x) = 4$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{\sqrt{196\sqrt[12]{b}}}{\sqrt[24]{b}}$  при  $b = \frac{4}{7}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

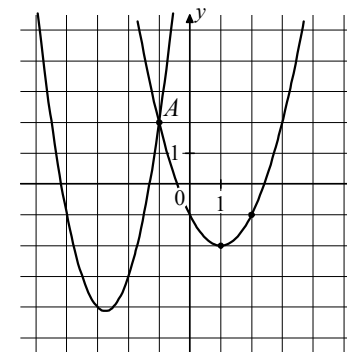
- 9 Мотоцикл, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 59$  км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 4$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние от мотоцикла до города, измеряемое в километрах, определяется выражением  $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоцикл будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Смешали некоторое количество 21-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 15-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображены графики функций  $f(x) = 2x^2 + 11x + 11$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите ординату точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите наибольшее значение функции  $y = \log_3(-40 + 14x - x^2)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение  $\sqrt{2\cos^2 x + 4\cos x + 5} = \sqrt{\cos x + 7}$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$ .

- 14 В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 24, а боковое ребро  $SA$  равно 31. На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = SK = 17$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .  
 а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .  
 б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

- 15 Решите неравенство  $3 \cdot \frac{64^x - 1}{4^x - 1} + \frac{30}{16^x + 4^x + 1} \leq 23$ .

- 16 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:  
 — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 6 % по сравнению с концом предыдущего месяца;  
 — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;  
 — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.  
 Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1,2 млн рублей?

- 17 Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке  $C$ . Вершины  $A$  и  $B$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая  $AC$  вторично пересекает большую окружность в точке  $E$ , а прямая  $BC$  вторично пересекает меньшую окружность в точке  $D$ .  
 а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BE$  параллельны.  
 б) Найдите  $BC$ , если радиусы окружностей равны  $\sqrt{15}$  и  $\sqrt{21}$ .

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x - 2a}{x + 3} + \frac{x - 1}{x - a} = 1$$

имеет ровно один корень.

- 19 На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 27 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.  
 а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 14?  
 б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 13?  
 в) Помимо полученных разностей соседних чисел, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа  $k$  можно так расставить числа, чтобы все разности (соседних чисел и чисел, стоящих через одно) были не меньше  $k$ ?

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2310409-2310412 (профильный уровень) от  
20.03.2024

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>2310409</b>	<b>105</b>	<b>7</b>	<b>1008</b>	<b>0,1</b>	<b>0,992</b>	<b>- 26</b>	<b>1024</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>14</b>	<b>- 6</b>	<b>- 8</b>
<b>2310410</b>	<b>126</b>	<b>8</b>	<b>720</b>	<b>0,2</b>	<b>0,973</b>	<b>- 31</b>	<b>512</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>- 12</b>	<b>- 2</b>
<b>2310411</b>	<b>24</b>	<b>- 2</b>	<b>8500</b>	<b>0,38</b>	<b>0,9951</b>	<b>24</b>	<b>10</b>	<b>0,5</b>	<b>60</b>	<b>15</b>	<b>56</b>	<b>8</b>
<b>2310412</b>	<b>42</b>	<b>- 9</b>	<b>3280</b>	<b>0,26</b>	<b>0,9936</b>	<b>72</b>	<b>14</b>	<b>0,5</b>	<b>30</b>	<b>18</b>	<b>167</b>	<b>2</b>

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

13

- а) Решите уравнение  $\sqrt{2\cos^2 x + 4\cos x + 5} = \sqrt{\cos x + 7}$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\cos^2 x + 4\cos x + 5 = \cos x + 7, & 2\cos^2 x + 4\cos x + 5 = \cos x + 7; \\ \cos x + 7 \geq 0; \end{cases}$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

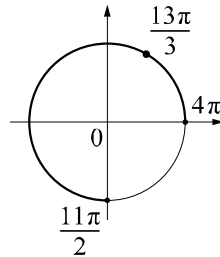
Пусть  $y = \cos x$ . Получаем уравнение  $2y^2 + 3y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{2}$ .

Уравнение  $\cos x = -2$  корней не имеет.

Уравнение  $\cos x = \frac{1}{2}$  имеет корни  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$ .

Получим число  $\frac{13\pi}{3}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{13\pi}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 24, а боковое ребро  $SA$  равно 31. На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = SK = 17$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .  
 б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .

**Решение.**

а) Пусть прямая  $BD$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $H$  (рис. 1), а  $SO$  — высота пирамиды  $SABCD$ . Поскольку пирамида  $SABCD$  правильная, центр квадрата  $ABCD$  совпадает с точкой  $O$ . Значит, прямая  $SO$  лежит в плоскости  $SBD$  (рис. 2). Следовательно, плоскость  $SBD$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Получаем, что прямая  $KH$ , являющаяся прямой пересечения плоскостей  $SBD$  и  $\alpha$ , перпендикулярна плоскости  $ABC$  и параллельна прямой  $SO$ . В треугольнике  $SOB$  имеем

$$BH = \frac{KB}{SB} \cdot OB = \frac{KB}{SB} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{7}{31} BD.$$

Рассмотрим квадрат  $ABCD$  (рис. 3). Пусть прямые  $BD$  и  $CM$  пересекаются в точке  $H_1$ . Треугольники  $MH_1B$  и  $CH_1D$  подобны по двум углам. Получаем

$$BH_1 = \frac{BM}{CD} \cdot DH_1 = \frac{7}{24} DH_1; BH_1 = \frac{7}{31} BD.$$

Таким образом, прямая  $CM$  делит отрезок  $BD$  в таком же отношении, что и плоскость  $\alpha$ , значит, плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .

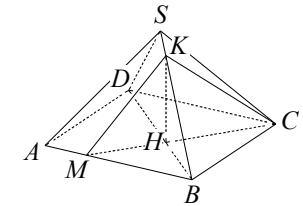


Рис. 1

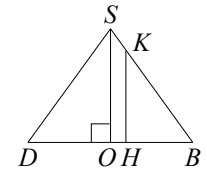


Рис. 2

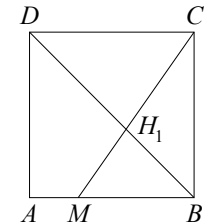


Рис. 3

б) Из доказанного в пункте *a* следует, что искомое сечение — треугольник *СКМ*.

В треугольнике *SOB* имеем

$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}; \quad SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{961 - 288} = \sqrt{673};$$

$$KH = \frac{KB}{SB} \cdot SO = \frac{14}{31} \cdot \sqrt{673} = \frac{14\sqrt{673}}{31}.$$

В прямоугольном треугольнике *BCM* имеем

$$CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = 25.$$

Отрезок *KH* перпендикулярен плоскости *ABC*, а значит, и прямой *CM*.

Следовательно, он является высотой треугольника *СКМ*. Площадь треугольника *СКМ* равна

$$\frac{CM \cdot KH}{2} = \frac{175\sqrt{673}}{31}.$$

**Ответ:** б)  $\frac{175\sqrt{673}}{31}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

15

Решите неравенство  $3 \cdot \frac{64^x - 1}{4^x - 1} + \frac{30}{16^x + 4^x + 1} \leq 23$ .

**Решение.**

Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{3(4^x - 1)(16^x + 4^x + 1)}{4^x - 1} + \frac{30}{16^x + 4^x + 1} \leq 23;$$

$$3(16^x + 4^x + 1) + \frac{30}{16^x + 4^x + 1} \leq 23 \text{ при } x \neq 0.$$

Сделаем замену  $y = 16^x + 4^x + 1$ . С учётом того, что  $y > 0$ , получаем

$$3y + \frac{30}{y} \leq 23; \quad 3y^2 - 23y + 30 \leq 0; \quad (3y - 5)(y - 6) \leq 0; \quad \frac{5}{3} \leq y \leq 6,$$

откуда  $\frac{5}{3} \leq 16^x + 4^x + 1 \leq 6$  при  $x \neq 0$ .

Решение неравенства  $16^x + 4^x + 1 \geq \frac{5}{3}$ :

$$3(4^x)^2 + 3 \cdot 4^x - 2 \geq 0; \quad \left(4^x + \frac{\sqrt{33} + 3}{6}\right) \left(4^x - \frac{\sqrt{33} - 3}{6}\right) \geq 0; \quad 4^x \geq \frac{\sqrt{33} - 3}{6},$$

откуда  $x \geq \log_4 \left( \frac{\sqrt{33} - 3}{6} \right)$ .

Решение неравенства  $16^x + 4^x + 1 \leq 6$ :

$$(4^x)^2 + 4^x - 5 \leq 0; \quad \left(4^x + \frac{\sqrt{21} + 1}{2}\right) \left(4^x - \frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) \leq 0; \quad 4^x \leq \frac{\sqrt{21} - 1}{2},$$

откуда  $x \leq \log_4 \left( \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \right)$ .

Решение исходного неравенства:  $\log_4 \frac{\sqrt{33} - 3}{6} \leq x < 0$ ,  $0 < x \leq \log_4 \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$ .

**Ответ:**  $\left[ \log_4 \frac{\sqrt{33} - 3}{6}; 0 \right); \left( 0; \log_4 \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \right]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\log_4 \frac{\sqrt{33}-3}{6}$ и/или $\log_4 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ .	1
ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**16** 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:  
 — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 6 % по сравнению с концом предыдущего месяца;  
 — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;  
 — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.  
 Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1,2 млн рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита равна  $S$ . По условию, долг перед банком (в млн руб.) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{18S}{19}, \dots, \frac{2S}{19}, \frac{S}{19}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 6 %, значит, последовательность размеров долга (в млн руб.) по состоянию на 1-е число такова:

$$1,06S, 1,06 \cdot \frac{18S}{19}, \dots, 1,06 \cdot \frac{2S}{19}, 1,06 \cdot \frac{S}{19}.$$

Следовательно, выплаты (в млн руб.) должны быть следующими:

$$0,06S + \frac{S}{19}, \frac{18 \cdot 0,06S + S}{19}, \dots, \frac{2 \cdot 0,06S + S}{19}, \frac{0,06S + S}{19}.$$

Всего следует выплатить

$$S + S \cdot 0,06 \left( 1 + \frac{18}{19} + \dots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19} \right) = S \left( 1 + \frac{20 \cdot 0,06}{2} \right) = 1,6S, \quad 1,6S = 1,2, \quad S = 0,75.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 0,75 млн рублей.

**Ответ:** 750 тысяч рублей

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**17** Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке  $C$ . Вершины  $A$  и  $B$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая  $AC$  вторично пересекает большую окружность в точке  $E$ , а прямая  $BC$  вторично пересекает меньшую окружность в точке  $D$ .  
 а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BE$  параллельны.  
 б) Найдите  $BC$ , если радиусы окружностей равны  $\sqrt{15}$  и  $\sqrt{21}$ .

**Решение.**

а) Пусть  $LM$  — общая касательная двух окружностей, причём точки  $L$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $AC$ , а точки  $L$  и  $M$  лежат по разные стороны от точки  $C$ . Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle CAD = \angle DCL = \angle MCB = \angle CEB.$$

Значит, прямые  $AD$  и  $BE$  параллельны, поскольку накрест лежащие углы  $CAD$  и  $CEB$  при пересечении этих прямых прямой  $AE$  равны.

б) Поскольку угол  $ACB$  прямой,  $AD$  и  $BE$  — диаметры меньшей и большей окружностей соответственно.

Поскольку  $\angle CAD = \angle CEB$ , прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $ECB$  подобны по острому углу с коэффициентом подобия  $\frac{AD}{BE} = \sqrt{\frac{5}{7}}$ .

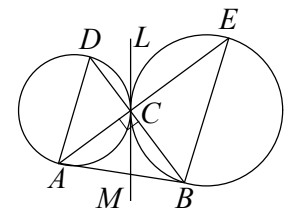
Пусть  $BC = AC = x$ , тогда  $CD = \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot BC = \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ .

В прямоугольном треугольнике  $ACD$ :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2; \quad 60 = x^2 + \frac{5x^2}{7},$$

откуда  $x = \sqrt{35}$ .

**Ответ:** б)  $\sqrt{35}$ .



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+3} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет ровно один корень.

### Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x-1)(x+3) - (x+3)(x-a)}{(x+3)(x-a)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3)}{(x+3)(x-a)} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются корни уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0,$$

не равные  $a$  и  $-3$ .

Если  $x = -3$  является корнем уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0,$$

то  $9 + 3(2a+1) + (2a^2 + 3a - 3) = 0$ ;  $2a^2 + 9a + 9 = 0$ , откуда  $a = -3$  или  $a = -1,5$ .

Если  $x = a$  является корнем уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0,$$

то  $a^2 - (2a+1)a + (2a^2 + 3a - 3) = 0$ ;  $a^2 + 2a - 3 = 0$ , откуда  $a = -3$  или  $a = 1$ .

Решим уравнение при полученных значениях  $a$ :

— при  $a = -3$  исходное уравнение имеет единственный корень  $x = -2$ ;

— при  $a = -1,5$  исходное уравнение имеет единственный корень  $x = 1$ ;

— при  $a = 1$  исходное уравнение имеет единственный корень  $x = 2$ .

Дискриминант квадратного уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0$$

равен

$$4a^2 + 4a + 1 - 8a^2 - 12a + 12 = 13 - 8a - 4a^2 = -4 \left( a + \frac{2 + \sqrt{17}}{2} \right) \left( a + \frac{2 - \sqrt{17}}{2} \right).$$

Значит, уравнение  $x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0$ :

— имеет ровно два различных корня при  $\frac{-2 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$ ;

— имеет ровно один корень при  $a = \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}$  или  $a = \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$ ;

— не имеет корней при  $a < \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}$  или  $a > \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень при:

$$a = \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}; a = -3; a = -1,5; a = 1; a = \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}.$$

**Ответ:**  $a = \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}; a = -3; a = -1,5; a = 1; a = \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения найдены точки $a = -3$ , $a = -1,5$ и $a = 1$ множества значений $a$	3
С помощью верного рассуждения найдены точки $a = \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}$ и $a = \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$ множества значений $a$ . ИЛИ Обоснованно получена хотя бы одна из точек множества значений $a$ : $a = -3$ , $a = -1,5$ и $a = 1$	2
Задача верно сведена к исследованию корней уравнения $x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 3a - 3) = 0$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1



Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**19** На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 27 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 14?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 13?

в) Помимо полученных разностей соседних чисел, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа  $k$  можно так расставить числа, чтобы все разности (соседних чисел и чисел, стоящих через одно) были не меньше  $k$ ?

**Решение.**

а) При любой расстановке разность числа 14 и любого соседнего с ним числа меньше 14. Значит, всегда найдутся хотя бы две разности меньше 14.

б) Например, для расстановки 1, 15, 2, 16, 3, 17, 4, 18, 5, 19, 6, 20, 7, 21, 8, 22, 9, 23, 10, 24, 11, 25, 12, 26, 13, 27, 14 все разности не меньше 13.

в) Оценим значение  $k$ . Рассмотрим числа от 1 до 9. Если какие-то два из них стоят рядом или через одно, то найдётся разность меньше 9. Иначе они стоят через два, поскольку всего чисел 27. В этом случае число 10 стоит рядом или через одно с каким-то числом от 2 до 9 и найдётся разность меньше 9.

Таким образом, всегда найдётся разность меньше 9. Все разности могут быть не меньше 8. Например, для расстановки 1, 10, 19, 2, 11, 20, 3, 12, 21, 4, 13, 22, 5, 14, 23, 6, 15, 24, 7, 16, 25, 8, 17, 26, 9, 18, 27 все разности не меньше 8.

**Ответ:** а) нет; б) да; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4