

Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

16 декабря 2020 года

Вариант МА2010209

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

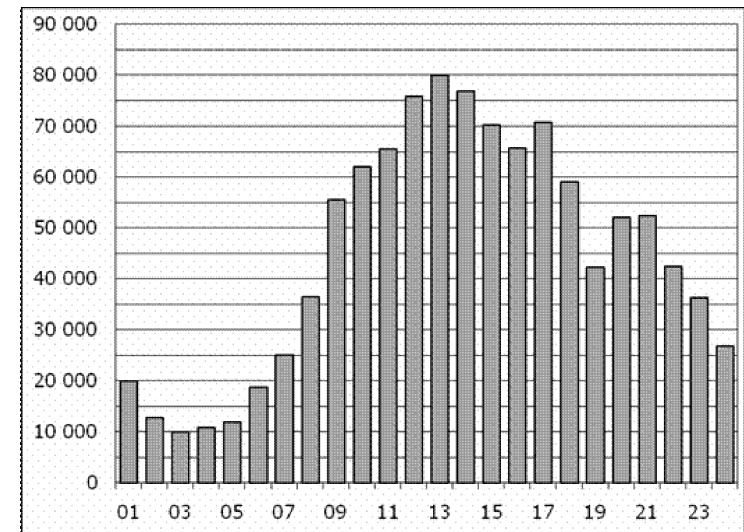
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Задачу № 1 правильно решили 27 950 человек, что составляет 86 % от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

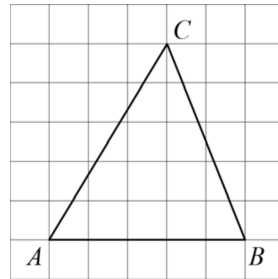
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается час, по вертикали — количество посетителей сайта на протяжении этого часа. Определите по диаграмме, в течение какого часа на сайте побывало минимальное количество посетителей.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .



Ответ: _____.

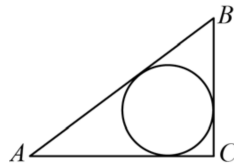
- 4 За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(x-2)^3 = -216$.

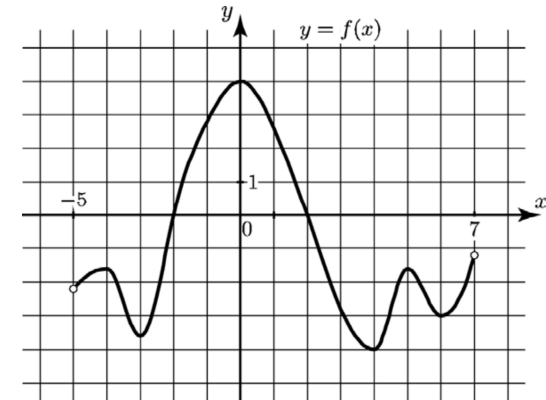
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 12$, $BC = 5$. Найдите радиус вписанной окружности.



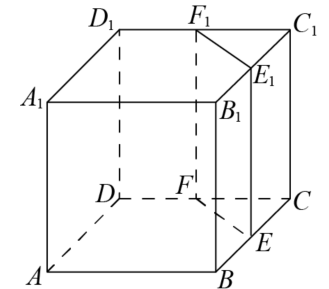
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 6,5]$.



Ответ: _____.

- 8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 4. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

Часть 2

- 9 Найдите $46 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,1$.

Ответ: _____.

- 10** Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 .

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность публикаций и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ: _____.

- 11** Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите точку минимума функции $y = 8^{x^2+4x+20}$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- 14** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 16. Через точки M и P , лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α , параллельная прямой AB . Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 16, а три другие равны между собой.

а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 40.
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α , если упомянутый периметр равен 46.

- 15** Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

- 16** В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I . Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60° .
б) Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 25 и $IC = 4$.

- 17** Евгений хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Евгения было недостаточно денег, а пакет стоил 195 000 рублей. В середине каждого месяца Евгений откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 40%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Евгению каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

- 18** Найдите все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ имеет единственное решение.

- 19** Пусть \overline{ab} обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.
а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a , b , c и d , что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 198$?
б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a , b , c и d , что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 495$, если среди цифр a , b , c и d есть цифра 5?
в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$, если среди цифр a , b , c и d есть цифры 5 и 6?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2010209-2010212 (профильный уровень) от
16.12.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010209	32500	3	2,5	0,25	- 4	2	- 4	32	- 45,08	18	60	- 2
2010210	31000	13	3	0,75	- 5	4	- 3	72	- 3,08	32	54	4
2010211	340,8	9	5	0,039	6,5	2,4	- 0,5	300	- 4	60	9	- 38
2010212	369,6	6	3	0,0294	0,2	1,5	- 0,25	560	- 3	60	8	- 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

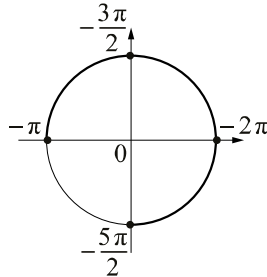
- а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)\right) = 0$; $\sin x \cos x = 0$,

а значит, $\sin 2x = 0$, следовательно, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}; -2\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\pi$.

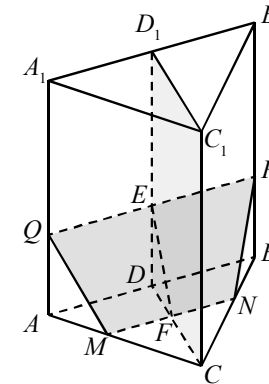
Ответ: а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -2\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

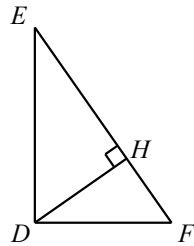
14

- $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 16. Через точки M и P , лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α , параллельная прямой AB . Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 16, а три другие равны между собой.
 а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 40.
 б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α , если упомянутый периметр равен 46.

Решение.



- а) Отметим на рёбрах BC и AA_1 точки N и Q соответственно так, что прямые MN , PQ и AB параллельны. Тогда трапеция $PQMN$ — искомое сечение. В ней $PQ = 16$, и пусть $QM = MN = NP = x$. Треугольник CMN равносторонний, значит, $MC = x$ и $AM = 16 - x$. В прямоугольном треугольнике QAM катет $AM = 16 - x$ короче гипотенузы $QM = x$, поэтому $x > 16 - x$, то есть $x > 8$. Тогда можем оценить периметр сечения: $PQ + QM + MN + NP = 16 + 3x > 40$.
 б) В данном случае $16 + 3x = 46$, то есть $x = 10$. Тогда $QM = MC = 10$, $AM = 16 - 10 = 6$ и $AQ = \sqrt{QM^2 - AM^2} = 8$. Поскольку плоскость α параллельна прямой AB , расстояние от любой точки прямой AB до α одно и то же, так что найдём расстояние от D до α , где D — середина AB . Пусть точка D_1 — середина A_1B_1 , тогда плоскость CDD_1 перпендикулярна α .



Искомое расстояние — высота DH прямоугольного треугольника EFD , где E — точка пересечения прямых DD_1 и PQ , F — точка пересечения прямых DC и MN . В треугольнике EFD сторона DE равна 8,

$$DF = \frac{6}{16}DC = \frac{3}{8} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, EF = \sqrt{ED^2 + DF^2} = \sqrt{91} \text{ и}$$

$$DH = \frac{DE \cdot DF}{EF} = \frac{24\sqrt{273}}{91}.$$

Ответ: б) $\frac{24\sqrt{273}}{91}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b , возможно, с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3 - 13x^2 + 50x - 56}{(x+2)(x+4)(x+7)} - 1 > 0; \frac{x^3 - 13x^2 + 50x - 56 - (x^3 + 13x^2 + 50x + 56)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0;$$

$$\frac{-26x^2 - 112}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0; \frac{13x^2 + 56}{(x+2)(x+4)(x+7)} < 0, \text{ следовательно, } x < -7 \text{ или } -4 < x < -2.$$

Ответ: $(-\infty; -7)$; $(-4; -2)$.

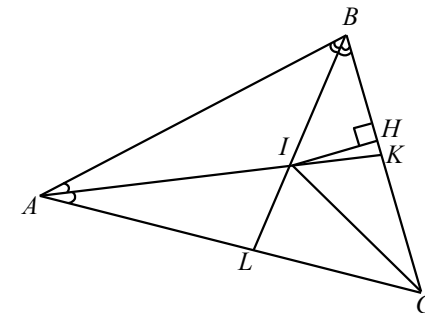
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I . Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

- Докажите, что угол BCA равен 60° .
- Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 25 и $IC = 4$.

Решение.



а) Обозначим через α и β углы CAB и ABC соответственно. Тогда углы IAB и ABI равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол BIA равен $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Такая же величина у вертикального к нему угла LIK . По условию около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность. Следовательно, угол BCA дополняет угол LIK до 180° . С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол BCA дополняет до 180° сумму углов α и β . Следовательно, $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha + \beta$ и $\alpha + \beta = 120^\circ$. Значит, угол BCA равен 60° .

б) Поскольку точка I является точкой пересечения биссектрис AK и BL , она также лежит на биссектрисе угла BCA и является центром вписанной

в треугольник ABC окружности. Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра IH , опущенного из этой точки на BC .

По доказанному угол HCI равен половине угла BCA , то есть он равен 30° . В прямоугольном треугольнике HCI против угла в 30° лежит катет IH .

Следовательно, $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 2$.

Площадь треугольника ABC равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 2 = 25$.

Ответ: б) 25.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 Евгений хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 195 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 40%. Какую наименьшую сумму нужно Евгению откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение.

Пусть Евгений откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n -го месяца у Евгения скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $195\,000 \cdot 1,4^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Евгений смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$x \geq \frac{195\,000 \cdot 1,4^{n-1}}{n}$. Положим $a_n = \frac{195\,000 \cdot 1,4^{n-1}}{n}$. Для того чтобы Евгений

смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму, большую либо равную наименьшему из чисел a_n . Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их

отношение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1,4 \cdot n}{n+1} = \frac{7n}{5n+5}$. Отсюда получаем, что при $n < 3$ выполнено

неравенство $a_{n+1} < a_n$, а при $n \geq 3$ выполнено неравенство $a_{n+1} \geq a_n$. Значит, наименьшим из чисел a_n будет число

$$a_3 = \frac{195\,000 \cdot 1,4^2}{3} = 127\,400.$$

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Евгению, равна 127 400 рублям.

Ответ: 127 400 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$$

имеет единственное решение.

Решение.

При $a = 0$ уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ принимает вид $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ и имеет бесконечно много решений.

При $a \neq 0$ выражения $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$ и $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$ имеют смысл при $x \geq |a|$. При таких значениях a и x имеем $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} > 0$. Значит, в этом случае уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ равносильно уравнениям

$$(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) = a(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}),$$

$$(x+a) - (x-a) = a(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) \text{ и } \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = 2.$$

Пусть $a \neq 0$ и $f(x) = \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$. Тогда функция $y = f(x)$ определена при $x \in [a; +\infty)$, непрерывна и строго возрастает на своей области определения. Следовательно, область значений функции $f(x)$ равна $[\sqrt{2|a|}; +\infty)$, причём каждое своё значение функция $f(x)$ принимает по одному разу. Значит, уравнение $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = 2$ и равносильное ему исходное уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = a$ имеют единственное решение при $\sqrt{2|a|} \leq 2$, то есть при $-2 \leq a < 0$ и $0 < a \leq 2$.

Ответ: $[-2; 0); (0; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек -2 и / или 2	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки 0 ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного количества корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19 Пусть \overline{ab} обозначает двузначное число, равное $10a + b$, где a и b — цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d , что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 198$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d , что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 495$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 6?

Решение.

а) Да.
Действительно, поскольку

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = (10a + b) \cdot (10c + d) - (10b + a) \cdot (10d + c) = 99 \cdot (ac - bd),$$

нужно подобрать такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d , что $ac - bd = 2$. Это верно, например, при $a = 1, b = 2, c = 8$ и $d = 3$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99 \cdot (ac - bd)$.

Значит, если $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 495$, то $99 \cdot (ac - bd) = 495 = 99 \cdot 5$ и $ac - bd = 5$.

Если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5, то одно из произведений ac или bd делится на 5, а значит, и другое произведение тоже делится на 5. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 5.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99 \cdot (ac - bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 6.

Если цифры 5 и 6 — это a и c , то $ac - bd \leq 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 28$.

Если цифры 5 и 6 — это b и d , то $ac - bd \leq 8 \cdot 9 - 5 \cdot 6 = 42$.

Если цифра 5 — это a или c , а цифра 6 — это b или d , то $ac - bd \leq 5 \cdot 9 - 6 \cdot 1 = 39$.

Если цифра 6 — это a или c , а цифра 5 — это b или d , то $ac - bd \leq 6 \cdot 9 - 5 \cdot 1 = 49$.

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$ равно $99 \cdot 49 = 4851$, оно достигается при $a = 6, b = 5, c = 9$ и $d = 1$.

Ответ: а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 49 = 4851$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте $в$; – пример в пункте $в$, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4