

**Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**

10 февраля 2021 года

Вариант МА2010310

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

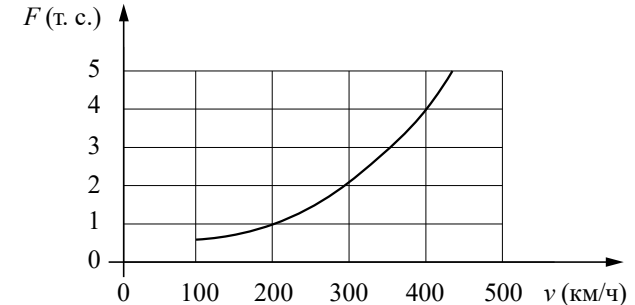
**Часть 1**

**Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1** По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 22 рубля. Если вечером на счёту меньше 22 рублей и снятие невозможно, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёту было 600 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

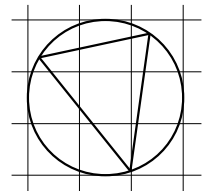
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит от скорости движения. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тоннах силы). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тоннах силы) при скорости 200 км/ч.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: \_\_\_\_\_.

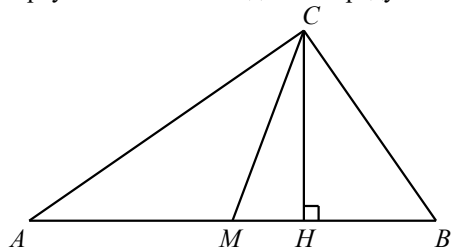
- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 17 пассажиров, равна 0,87. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,58. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 16.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Найдите корень уравнения  $2^{\log_6(6x+7)} = 2$ .

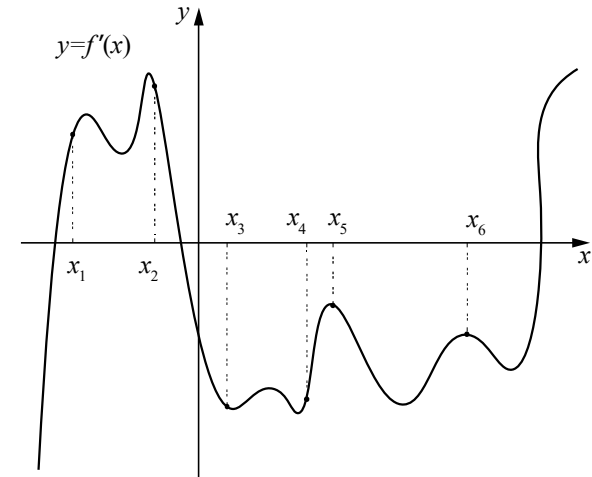
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен  $26^\circ$ . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



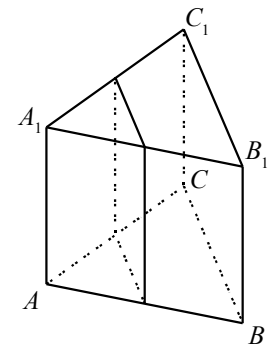
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены шесть точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции  $f(x)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 16. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB, AC, A_1 B_1$  и  $A_1 C_1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

9

Найдите значение выражения  $\frac{7\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}}{35\sqrt{6-2}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10

При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 350$  нм на дифракционную решётку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$  (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким минимальным углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1400 нм?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11

Имеется два сосуда. Первый содержит 40 кг, а второй — 10 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 29 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: \_\_\_\_\_.

12

Найдите точку максимума функции  $y = 5^{-18-12x-x^2}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

13

а) Решите уравнение  $2 \sin 2x - \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

14

Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $BC$  соответственно.

а) Докажите, что  $MN$  является биссектрисой угла  $BMC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $MN$ , если  $BD = 8\sqrt{3}$ ,  $AC = 12$ .

15

Решите неравенство  $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \leq 1$ .

16

В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC = 15$ ,  $BC = 18$ . На стороне  $AB$  отметили точки  $M_1$  и  $M_2$  так, что  $AM_1 < AM_2$ . Через точки  $M_1$  и  $M_2$  провели прямые, перпендикулярные стороне  $AB$  и отсекающие от треугольника  $ABC$  пятиугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что  $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$ .

б) Найдите площадь данного пятиугольника.

17

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9 % в первый год и на одинаковое целое число  $n$  процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18

Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(x^2 - 7 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 7)^2 + \ln^2(x - a)$$

имеет единственное решение на отрезке  $[0; 3]$ .

19

Для любого натурального числа  $n$  ( $n \geq 1$ ) обозначим через  $O(n)$  количество нечётных цифр в десятичной записи этого числа. Например,  $O(123) = 2$ , а  $O(2048) = 0$ .

а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(2 \cdot n) = O(n) + 2$ ?

б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(5^n + 2^n - 1) > n$ ?

в) Для какого наименьшего натурального числа  $n$  выполнено неравенство  $O(11 \cdot n) > 2 \cdot O(n)$ ?

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2010309-2010312 (профильный уровень) от  
10.02.2021

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>2010309</b>	9	4	2	0,44	10,5	64	3	80	576	90	3	- 5
<b>2010310</b>	28	1	1,5	0,29	1,5	58	4	48	1225	30	6	- 6
<b>2010311</b>	22	15,4	2,5	0,99	2	58	4	3025	729	60	10	13
<b>2010312</b>	24	9,5	1,5	0,98	1	41	5	1764	8	60	20	4

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

- 13** а) Решите уравнение  $2\sin 2x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}\sin x$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$2\sin 2x - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 0;$$

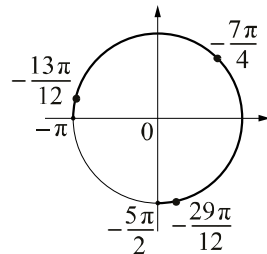
$$\sin 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

Таким образом,  $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$  или  $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ , следовательно,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ , с помощью единичной окружности.



Получаем  $-\frac{29\pi}{12}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{13\pi}{12}$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{29\pi}{12}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{13\pi}{12}$ .

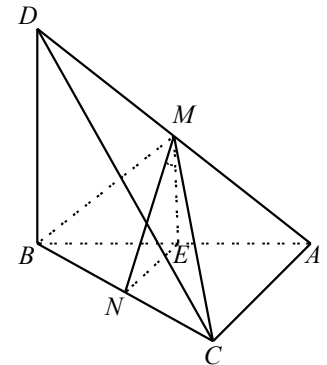
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 14** Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $BC$  соответственно.  
 а) Докажите, что  $MN$  является биссектрисой угла  $BMC$ .  
 б) Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $MN$ , если  $BD = 8\sqrt{3}$ ,  $AC = 12$ .

**Решение.**

а) По теореме о трёх перпендикулярах отрезок  $DC$  перпендикулярен отрезку  $AC$ . Медиана  $CM$  прямоугольного треугольника  $DCA$  равна половине гипотенузы  $DA$ . Медиана  $BM$  прямоугольного треугольника  $ADB$  также равна половине гипотенузы  $DA$ . Значит, треугольник  $BCM$  равнобедренный с основанием  $BC$ . Поэтому медиана  $MN$  треугольника  $BCM$  является биссектрисой.

б) Пусть  $ME$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $M$  на ребро  $AB$ . Тогда  $ME$  — средняя линия прямоугольного треугольника  $ABD$ , значит,  $ME = 4\sqrt{3}$  и отрезок  $ME$  параллелен отрезку  $DB$ . Так как  $DB$  — перпендикуляр к плоскости основания пирамиды, отрезок  $ME$  также является перпендикуляром к этой плоскости. Точки  $E$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , значит,  $NE$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . Поэтому  $NE = \frac{1}{2}AC = 6$ . Поскольку отрезок  $ME$  параллелен отрезку  $DB$ , угол между скрещивающимися прямыми  $DB$  и  $MN$  равен углу между пересекающимися прямыми  $ME$  и  $MN$ , то есть углу  $EMN$ .



Из треугольника  $MNE$  находим, что

$$\operatorname{tg} \angle EMN = \frac{EN}{ME} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,  $\angle EMN = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Ответ:** б)  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	2
Верно доказан пункт $a$ . ИЛИ Верно решён пункт $b$ при отсутствии обоснований в пункте $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство  $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \leq 1$ .

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде  $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \leq 7^0$ ;  $\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16} \leq 0$ .

Случай 1:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+16} \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(x-1)(x-6)}{(x-4)^2} \leq 0, \end{cases} \text{ следовательно, } 1 \leq x < 4; 4 < x \leq 6.$$

Случай 2:

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{x^2+7x+6}{x^2-8x+16} \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{(x+1)(x+6)}{(x-4)^2} \leq 0, \end{cases} \text{ следовательно, } -6 \leq x \leq -1.$$

Получаем  $-6 \leq x \leq -1$ ;  $1 \leq x < 4$ ;  $4 < x \leq 6$ .

**Ответ:**  $-6 \leq x \leq -1$ ;  $1 \leq x < 4$ ;  $4 < x \leq 6$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC = 15$ ,  $BC = 18$ . На стороне  $AB$  отметили точки  $M_1$  и  $M_2$  так, что  $AM_1 < AM_2$ . Через точки  $M_1$  и  $M_2$  провели прямые, перпендикулярные стороне  $AB$  и отсекающие от треугольника  $ABC$  пятиугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что  $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$ .

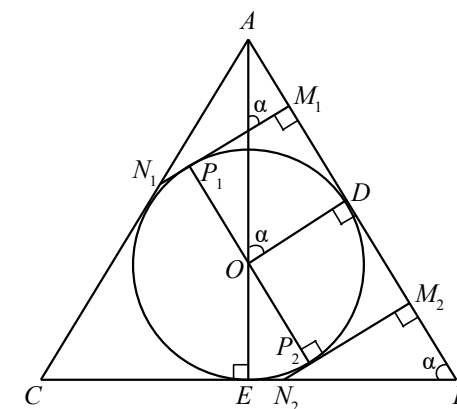
б) Найдите площадь данного пятиугольника.

**Решение.**

а) Заметим, что окружность, вписанная в пятиугольник, о котором говорится в условии задачи, — это окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ .

Пусть вписанная окружность равнобедренного треугольника  $ABC$  касается боковой стороны  $AB$  в точке  $D$  и основания  $BC$  в точке  $E$ . Тогда  $AE$  — высота, медиана и биссектриса треугольника  $ABC$ ,

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{225 - 81} = 12.$$



Пусть  $O$  — центр этой окружности,  $r$  — её радиус,  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ ,  $p$  — его полупериметр. Тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE}{\frac{1}{2}(AB + BC + AC)} = 4,5.$$

Пусть  $CN_1M_1M_2N_2$  — данный пятиугольник, а  $P_1$  и  $P_2$  — точки касания окружности со сторонами  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$  соответственно (см. рисунок). Тогда четырёхугольники  $P_1M_1DO$  и  $M_2P_2OD$  — это квадраты стороны которых, равны радиусу окружности  $r$ .

Из треугольника  $AOD$  находим, что

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{(AE - OE)^2 - OD^2} = \sqrt{(12 - 4,5)^2 - 4,5^2} = 6.$$

Тогда получаем, что

$$AM_1 = AD - M_1D = 6 - 4,5 = 1,5; \quad BM_2 = AB - AD - DM_2 = 15 - 6 - 4,5 = 4,5.$$

Значит,  $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$ .

б) Обозначим  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE}{BE} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ .

Из треугольника  $N_2M_2B$  получаем, что  $N_2M_2 = BM_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4,5 \cdot \frac{4}{3} = 6$ ,

Значит,  $S_{\Delta N_2M_2B} = \frac{1}{2} N_2M_2 \cdot M_2B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,5 = 13,5$ .

Из треугольника  $ABC$  находим, что  $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$ .

Тогда  $\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{\frac{16}{9} - 1} = \frac{24}{7}$ .

Из треугольника  $N_1M_1A$  получаем, что  $N_1M_1 = AM_1 \cdot \operatorname{tg} \angle BAC = 1,5 \cdot \frac{24}{7} = \frac{36}{7}$ .

Значит,  $S_{\Delta N_1M_1A} = \frac{1}{2} N_1M_1 \cdot M_1A = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot \frac{36}{7} = \frac{27}{7}$ .

Следовательно,

$$S_{CN_1M_1M_2N_2} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta N_2M_2B} - S_{\Delta N_1M_1A} = 108 - 13,5 - \frac{27}{7} = 90 \frac{9}{14}$$

**Ответ:** б)  $90 \frac{9}{14}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**17** По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9 % в первый год и на одинаковое целое число  $n$  процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

**Решение.**

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма  $S$ . На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3 \cdot S = 1,331 \cdot S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,09 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 \cdot S,$$

где  $n$  — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,09 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 \cdot S > 1,331 \cdot S,$$

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1090} = 1,22\dots$$

При  $n = 11$  неравенство

$$1,11^2 > 1,22\dots; \quad 1,2321 > 1,22\dots$$

верно, а при  $n = 10$  неравенство

$$1,1^2 > 1,22\dots; \quad 1,21 > 1,22\dots$$

неверно, как и при всех меньших  $n$ .

**Ответ:** 11.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**18** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(x^2 - 7 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 7)^2 + \ln^2(x - a)$$

имеет единственное решение на отрезке  $[0; 3]$ .

**Решение.**

Уравнение  $(x^2 - 7 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 7)^2 + \ln^2(x - a)$  равносильно уравнению  $(x^2 - 7)\ln(x - a) = 0$ . Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а второй имеет смысл. Уравнение  $x^2 - 7 = 0$  имеет единственное решение  $x = \sqrt{7}$  на отрезке  $[0; 3]$ . Выражение  $\ln(\sqrt{7} - a)$  имеет смысл при  $a < \sqrt{7}$ . Уравнение  $\ln(x - a) = 0$  имеет единственное решение  $x = a + 1$  на отрезке  $[0; 3]$  при  $a \in [-1; 2]$ . Выражение  $x^2 - 7$  имеет смысл при всех значениях  $x$ . Решения  $x = \sqrt{7}$  и  $x = a + 1$  уравнения  $(x^2 - 7)\ln(x - a) = 0$  совпадают при  $a = \sqrt{7} - 1$ .

Таким образом, поскольку  $\sqrt{7} - 1 < 2 < \sqrt{7}$ , при  $a \geq \sqrt{7}$  исходное уравнение не имеет решений на заданном отрезке, при  $a < \sqrt{7}$  имеет решение  $x = \sqrt{7}$ , при  $-1 \leq a \leq 2$  имеет решение  $x = a + 1$ , и при  $a = \sqrt{7} - 1$  эти два решения совпадают. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке  $[0; 3]$  при тех  $a$ , меньших  $\sqrt{7}$ , которые не лежат на отрезке  $[-1; 2]$ , а также при  $a = \sqrt{7} - 1$ , то есть при  $a < -1$ ;  $a = \sqrt{7} - 1$  и  $2 < a < \sqrt{7}$ .

**Ответ:**  $a < -1$ ;  $a = \sqrt{7} - 1$ ;  $2 < a < \sqrt{7}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения $a$ , но ответ содержит лишнее значение $-1, 2$ или $\sqrt{7}$	3
С помощью верного рассуждения получены все значения $a$ , кроме $a = \sqrt{7} - 1$	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**19** Для любого натурального числа  $n$  ( $n \geq 1$ ) обозначим через  $O(n)$  количество нечётных цифр в десятичной записи этого числа. Например,  $O(123) = 2$ , а  $O(2048) = 0$ .

а) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(2 \cdot n) = O(n) + 2$ ?

б) Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(5^n + 2^n - 1) > n$ ?

в) Для какого наименьшего натурального числа  $n$  выполнено неравенство  $O(11 \cdot n) > 2 \cdot O(n)$ ?

**Решение.**

а) Да. Например, при  $n = 66$  имеем

$$O(2 \cdot n) = O(132) = 2 = O(66) + 2 = O(n) + 2.$$

б) Для любого натурального  $n$  имеем  $5^n + 2^n - 1 < 10^n$ , так как  $10^n - 5^n - 2^n + 1 = (5^n - 1)(2^n - 1) > 0$ . Значит, в числе  $5^n + 2^n - 1$  не более  $n$  цифр. Следовательно,  $O(5^n + 2^n - 1) \leq n$  и искомого значения  $n$  не существует.

в) Если  $1 \leq n \leq 9$ , то  $O(11 \cdot n) = 2 \cdot O(n)$ . Если  $10 \leq n \leq 19$  и  $n$  чётно, то число  $11 \cdot n$  чётное и трёхзначное. Отсюда получаем, что в этом случае  $2 \cdot O(n) = 2 \geq O(11 \cdot n)$ . Если  $10 \leq n \leq 19$  и  $n$  нечётно, то число  $11 \cdot n$  трёхзначное и  $O(11 \cdot n) \leq 3$ . Отсюда получаем, что в этом случае  $2 \cdot O(n) = 4 > O(11 \cdot n)$ .

Если  $20 \leq n \leq 27$  и  $n$  чётно, то все цифры чисел  $n$  и  $11 \cdot n$  также чётные. Отсюда получаем, что в этом случае  $2 \cdot O(n) = 0 = O(11 \cdot n)$ . Если  $20 \leq n \leq 27$  и  $n$  нечётно, то  $200 < 11 \cdot n < 300$ . Отсюда получаем, что в этом случае первая цифра трёхзначного числа  $11 \cdot n$  равна 2 и  $2 \cdot O(n) = 2 \geq O(11 \cdot n)$ .

При  $n = 28$  имеем  $O(11 \cdot n) = O(308) = 1 > 0 = 2 \cdot O(28) = 2 \cdot O(n)$ . Значит, искомое наименьшее значение  $n$  равно 28.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 28.



<b>Содержание критерия</b>	<b>Баллы</b>
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта $a$ ; – обоснованное решение пункта $b$ ; – искомая оценка в пункте $v$ ; – пример в пункте $v$ , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4