Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
19 декабря 2024 года
Вариант МА2410211
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

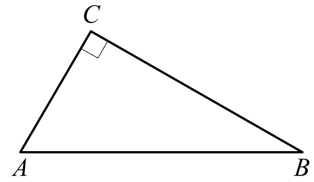
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

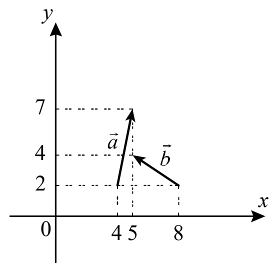
Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 8$, $\sin A = 0,75$. Найдите длину стороны BC.



Ответ: ___________________________.

2 Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.

Ответ: ___________________________.

4 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Ответ: ___________________________.

5 Симметричную монету бросают 17 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 8 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 7 орлов»?

Ответ: ___________________________.

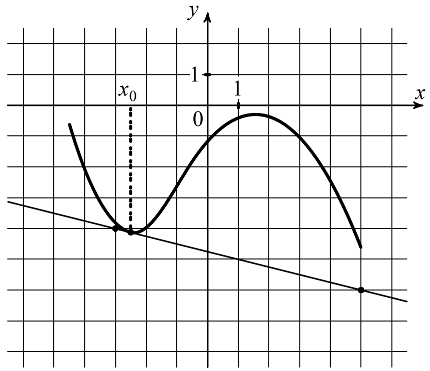
6 Найдите корень уравнения $\frac{1}{6x-8}=10$.

Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения $12^{10,4}\cdot 4^{-11,4}:3^{9,4}$.

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

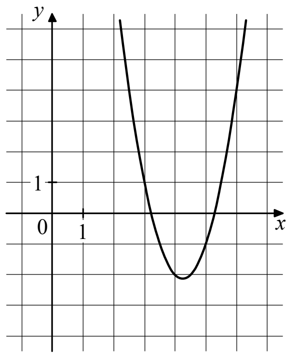
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v=4$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u=\frac{m}{m+M}v\cos\alpha$ (м/с), где $m=80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M=320$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,4 м/с?

Ответ: ___________________________.

10 Первая труба наполняет резервуар на 60 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 16 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-1)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=109x-107\sin x+67$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x-4\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+4=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K:KC_1=2:5$. Четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 7.

а) Докажите, что точка N — середина ребра BC.

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 42, а высота призмы равна 3.

15 Решите неравенство $\frac{16^x-2\cdot 4^{x+1}+13}{4^x-2}+\frac{2\cdot 4^{x+1}-31}{4^x-4}\le 4^x+2$.

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 100 тыс. рублей;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 81,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

17 В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.
а) Докажите, что $\angle BKM = 45°$.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если $AB = 4\sqrt{6}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 - x - 7a = |7x - a|$$

имеет больше двух различных корней.

19 С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 210?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 175?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 800 включительно?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2410209-2410212 (профильный уровень) от 19.12.2024

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2410209	3,6	9	112	0,4	0,08	- 1,5	12,25	0,5	0,29	10	- 50	107
2410210	17,5	58	94	0,2	0,08	12	225	0,25	0,22	33	- 33	180
2410211	6	25	54	0,24	1,25	1,35	0,75	- 0,25	60	20	53	67
2410212	8	45	56	0,2	1,1	- 0,16	1,75	- 0,5	60	21	- 33	44

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $2\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

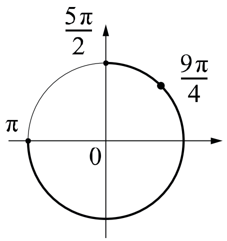
$$2 - 4\sin^2 x - 4\sqrt{2}\sin x + 4 = 0; \quad \left(2\sin x - \sqrt{2}\right)\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда находим $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{9\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

14

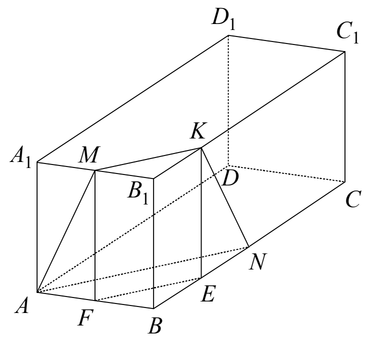
В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K : KC_1 = 2:5$. Четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 7.

а) Докажите, что точка N — середина ребра BC.

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 42, а высота призмы равна 3.

Решение.

а) Пусть отрезки MF и KE — высоты призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK, а значит, параллелен отрезку AN и равен $\frac{4}{7}AN$. Следовательно, треугольники FBE и ABN подобны с коэффициентом $\frac{4}{7}$.



Значит,

$$BN = \frac{7}{4}BE = \frac{7}{4}B_1K = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC.$$

Следовательно, точка N — середина BC.

б) Поскольку объём призмы равен 42, а её высота равна 3, площадь параллелограмма $ABCD$ равна 14.

Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$. Тогда треугольник ABN равнобедренный с основанием $AN = 7$. Площадь этого треугольника равна 3,5. Значит, его высота h, проведённая из вершины B, равна 1, а высота трапеции $AMKN$ равна $\sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{3}{7}h\right)^2} = \frac{15\sqrt{2}}{7}$. Средняя линия трапеции равна $\frac{11}{2}$, а значит, её площадь равна $\frac{165\sqrt{2}}{14}$.

Ответ: б) $\frac{165\sqrt{2}}{14}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

15

Решите неравенство $\dfrac{16^x-2\cdot 4^{x+1}+13}{4^x-2}+\dfrac{2\cdot 4^{x+1}-31}{4^x-4}\le 4^x+2$.

Решение.

Пусть $t=4^x$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{t^2-8t+13}{t-2}+\frac{8t-31}{t-4}\le t+2;\quad \frac{(t-6)(t-2)}{t-2}+\frac{1}{t-2}+\frac{8(t-4)}{t-4}+\frac{1}{t-4}\le t+2;$$

$$\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t-4}\le 0;\quad \frac{2t-6}{(t-2)(t-4)}\le 0,$$

откуда находим $t<2$; $3\le t<4$.

При $t<2$ получим $4^x<2$, откуда следует, что $x<\dfrac{1}{2}$.

При $3\le t<4$ получим $3\le 4^x<4$, откуда следует, что $\dfrac{1}{2}\log_2 3\le x<1$.

Решение исходного неравенства:

$$x<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\log_2 3\le x<1.$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$; $\left[\dfrac{1}{2}\log_2 3;1\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\dfrac{1}{2}\log_2 3$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 100 тыс. рублей;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 81,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S тыс. рублей.

В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен $1,2S$, а в июле равен $1,2S-100$. В январе 2028 года долг будет равен $1,44S-120$, а в июле равен $1,44S-220$. В январе 2029 года долг будет равен $1,728S-264$.. По условию к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $1,728S-264$ тыс. рублей. Получаем

$$1,728S-264=81,6;\quad 1,728S=345,6,$$

откуда находим $S=200$.

Планируется взять кредит в размере 200 тыс. рублей.

Ответ: 200 тыс. рублей.

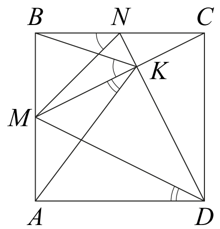
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

17 В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.

а) Докажите, что $\angle BKM = 45°$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если $AB = 4\sqrt{6}$.

Решение.



а) Прямоугольные треугольники MBC и NCD равны по двум катетам $\left(BM = CN = \dfrac{AB}{2}; BC = CD\right)$, значит, $\angle NCK = \angle CDN$. В треугольнике NCK

$$\angle NKC = 180° - \angle KNC - \angle NCK =$$
$$= 180° - \angle DNC - \angle CDN = \angle NCD = 90°,$$

то есть прямые MC и ND перпендикулярны.

В четырёхугольнике $MBNK$ углы B и K прямые, значит, точки B и K лежат на окружности с диаметром MN. Вписанные углы BNM и BKM, опирающиеся на одну дугу, равны. В прямоугольном треугольнике MBN катеты равны, значит, $\angle BNM = 45°$. Следовательно, $\angle BKM = 45°$.

б) В четырёхугольнике $AMKD$ углы A и K прямые, значит, точки A и K лежат на окружности с диаметром MD. Вписанные углы MKA и MDA, опирающиеся на одну дугу, равны.

В прямоугольном треугольнике MAD катет MA вдвое меньше катета AD, откуда получаем

$$\operatorname{tg}\angle MDA = \frac{1}{2}; \quad \sin\angle MDA = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \cos\angle MDA = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Радиус R окружности, описанной около треугольника ABK, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle AKB} = \frac{4\sqrt{6}}{2\sin\left(\angle BKM + \angle MKA\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin\left(\angle BNM + \angle MDA\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{\sin 45° \cos\angle MDA + \cos 45° \sin\angle MDA} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 - x - 7a = |7x - a|$$

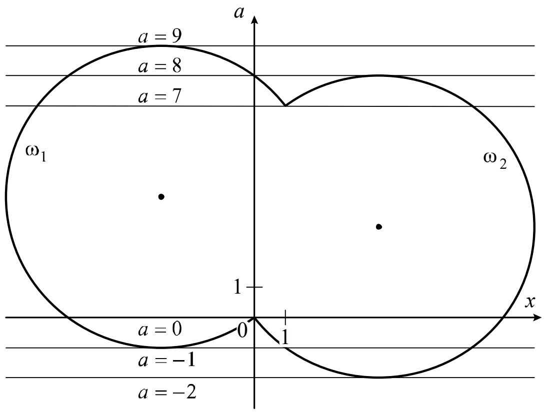
имеет больше двух различных корней.

Решение.

При $a \geq 7x$ уравнение $x^2 + a^2 - x - 7a = |7x - a|$ принимает вид

$$x^2 + a^2 - x - 7a = -7x + a; \; x^2 + a^2 + 6x - 8a = 0; \; (x+3)^2 + (a-4)^2 = 25.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости Oxa дугу ω_1 окружности с центром в точке $(-3; 4)$ радиусом 5, лежащую в полуплоскости $a \geq 7x$, с концами в точках $(0; 0)$ и $(1; 7)$.



При $a \le 7x$ уравнение $x^2 + a^2 - x - 7a = |7x - a|$ принимает вид

$$x^2 + a^2 - x - 7a = 7x - a;\quad x^2 + a^2 - 8x - 6a = 0;\quad (x-4)^2 + (a-3)^2 = 25.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости Oxa дугу ω_2 окружности с центром в точке $(4;3)$ радиусом 5, лежащую в полуплоскости $a \le 7x$, с концами в точках $(0;0)$ и $(1;7)$.

Число корней исходного уравнения равно числу точек пересечения прямой $a = c$ с объединением дуг ω_1 и ω_2.

Дуга ω_1 пересекается с прямой $a = c$ в двух точках при $-1 < c \le 0$ и $7 \le c < 9$, в одной точке при $c = -1$, $0 < c < 7$ и $c = 9$ и не пересекается при $c < -1$ и $c > 9$.

Дуга ω_2 пересекается с прямой $a = c$ в двух точках при $-2 < c \le 0$ и $7 \le c < 8$, в одной точке при $c = -2$, $0 < c < 7$ и $c = 8$ и не пересекается при $c < -2$ и $c > 8$.

При $c = 0$ и при $c = 7$ прямая $a = c$ проходит через общую точку дуг ω_1 и ω_2.

Следовательно, исходное уравнение имеет больше двух различных корней при $-1 \le a \le 0$ и $7 \le a \le 8$.

Ответ: $-1 \le a \le 0$; $7 \le a \le 8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a = 0$ и/или $a = 7$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $(a = -1, a = 0, a = 7, a = 8)$, но неверно определены промежутки значений a. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 210?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 175?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 800 включительно?

Решение.

а) Сумма цифр числа 640 равна 10. Следовательно, в результате операции из этого числа получится $\frac{640-10}{3} = 210$.

б) Пусть число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры и $a \ne 0$. Тогда сумма цифр такого числа равна $a + b + c$, а в результате операции из него получится число $\frac{(100a + 10b + c) - (a + b + c)}{3} = 33a + 3b$. Получившееся число делится на 3. Следовательно, число 175 не могло получиться.

в) Заметим, что получившееся число не зависит от последней цифры исходного числа, поэтому достаточно найти количество различных чисел, получающихся из чисел, делящихся на 10.

Рассмотрим числа $100a + 10b$ и $100x + 10y$, где a, b, x и y — цифры и $a \ne 0$, $x \ne 0$. В результате операции из них получатся числа $33a + 3b$ и $33x + 3y$ соответственно. Разность этих чисел равна $33(a - x) + 3(b - y)$. Если $a \ne x$, то эта разность не может быть равной нулю, поскольку $|3(b - y)| \le 27$. Если $a = x$, то разность может быть равной нулю только

при $b = y$, то есть если исходные числа совпадают. Значит, в результате операции из различных трёхзначных чисел, делящихся на 10, получаются различные числа.
Среди чисел от 100 до 800 ровно 71 число делится на 10. Следовательно, в результате операции из чисел от 100 до 800 может получиться 71 различное число.
Ответ: а) да; б) нет; в) 71.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*