

Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

11 февраля 2025 года

Вариант МА2410310

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

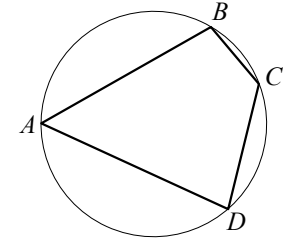
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1

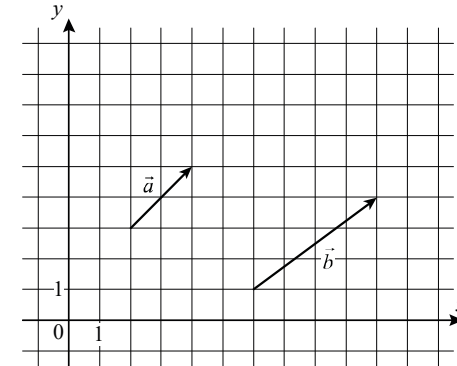
Стороны AB , BC , CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 83° , 81° , 64° , 132° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

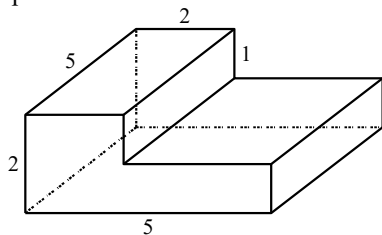
2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: _____.

- 3 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: _____.

- 4 В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в разных группах.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

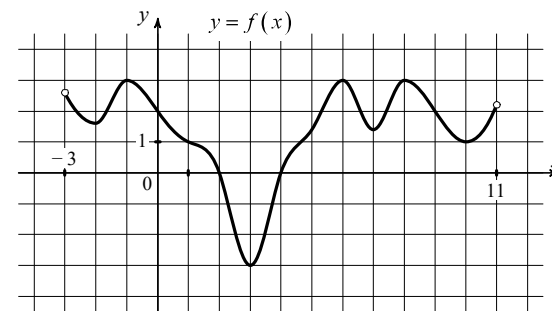
- 6 Найдите корень уравнения $2^{x-9} = \frac{1}{4}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(x^2 + 9y^2 - (x - 3y)^2) : (-6xy)$, при $x = \frac{\sqrt{5}}{6}$, $y = 0,38$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[4; 9]$.



Ответ: _____.

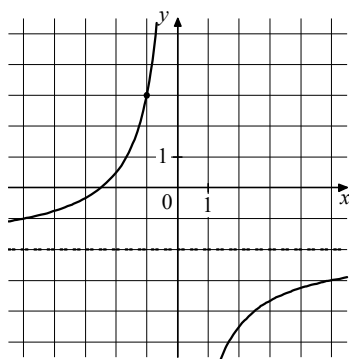
- 9 Очень лёгкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 4$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля составляет $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не меньше чем $5 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

- 10 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью меньше скорости первого на 6 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 56 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно -27 .



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = (34 - x)e^{x+34}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $36\sqrt{1-\sin^2 x} - 36^{\cos x} = \frac{35}{6}$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
- 14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
 а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
 б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .
- 15 Решите неравенство $\frac{\log_4(3-x) - \log_4(x+1)}{\log_4^2 x^2 + 2\log_4 x^4 + 4} \geq 0$.
- 16 В июле 2026 года планируется взять кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:
 — каждый январь долг возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего года;
 — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 — в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным первоначальному;
 — выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
 — к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.
 Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 13 млн рублей.

- 17** Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB= CW:WD=2:3$. В треугольнике PQW угол W острый, при этом радиус описанной около этого треугольника окружности равен $\frac{13}{4}$, $PQ=6$, $QW=\frac{5}{2}$.
- а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство
- $$|x+2a+6|+|x-2a-14|\leq 4|x|+4|x-4|$$
- выполняется при всех значениях x .

- 19** На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 10, а среднее арифметическое шести наибольших равно 30.
- а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 8?
б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 22?
в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

math100.ru

**Ответы на тренировочные варианты 2410309-2410312 (профильный уровень) от
11.02.2025**

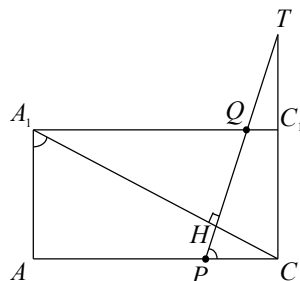
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2410309	143,5	6	40	0,75	0,73	8	- 2	4	30	60	16	72
2410310	98	14	35	0,7	0,24	7	- 1	3	90	48	0,2	33
2410311	164	12	80	0,3	0,278	- 1	2	5	30	48	- 22	49
2410312	138	3	11	0,2	0,167	- 2	- 4	7	30	24	- 11	59

Прямые A_1C и PT перпендикулярны, прямая A_1C перпендикулярна прямой BD , следовательно (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .

б) Пусть точка H — точка пересечения A_1C и PQ . Отрезок A_1H — высота указанной пирамиды. Имеем

$$PQ = \frac{4}{5}PT = \frac{4}{5}\sqrt{TC^2 + PC^2} = 4\sqrt{2},$$

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = 4\sqrt{6}.$$



Из подобия треугольников AA_1C и HPC получаем $HC = \frac{AC \cdot PC}{A_1C} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$.

Следовательно,

$$A_1H = A_1C - HC = \frac{11\sqrt{6}}{4}.$$

Объём пирамиды A_1KNLM равен

$$\frac{1}{3}A_1H \cdot PQ \cdot \frac{LM + NK}{2} = 22\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $22\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15

Решите неравенство $\frac{\log_4(3-x) - \log_4(x+1)}{\log_4^2 x^2 + 2\log_4 x^4 + 4} \geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{\log_4(3-x) - \log_4(x+1)}{\log_4^2 x^2 + 4\log_4 x^2 + 4} \geq 0; \quad \frac{\log_4(3-x) - \log_4(x+1)}{(\log_4 x^2 + 2)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя $(\log_4 x^2 + 2)^2$ не определено при $x = 0$, равно нулю при $x = -\frac{1}{4}$ и при $x = \frac{1}{4}$ и положительно при других значениях x .

При $x \neq -\frac{1}{4}$, $x \neq 0$ и $x \neq \frac{1}{4}$ неравенство принимает вид

$$\log_4(3-x) - \log_4(x+1) \geq 0; \quad \log_4(x+1) \leq \log_4(3-x); \quad 0 < x+1 \leq 3-x,$$

следовательно, $-1 < x \leq 1$. Учитывая условия $x \neq -\frac{1}{4}$, $x \neq 0$ и $x \neq \frac{1}{4}$, получаем

$$-1 < x < -\frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{4} < x < 0; \quad 0 < x < \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4} < x \leq 1.$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{4}\right); \left(-\frac{1}{4}; 0\right); \left(0; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; 1\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16** В июле 2026 года планируется взять кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным первоначальному;
 - выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
 - к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.
- Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 13 млн рублей.

Решение.

Обозначим размер кредита буквой S . В 2027, 2028 и 2029 годах платёж равен $0,08S$ млн. Всего $0,24S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В январе 2030 года долг возрастёт до $1,08S$ млн. Обозначим буквой x размер выплачиваемой суммы в 2030 и 2031 годах. После выплаты в 2030 году долг равен $1,08S - x$, а в феврале 2031 года он равен $1,08(1,08S - x)$. В июле 2031 года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,08(1,08S - x)$ и по условию равна x . Значит,

$$1,08(1,08S - x) = x, \quad 2,08x = 1,1664S, \quad x = \frac{11664}{20800}S,$$

$$\text{и общий размер выплат равен } 0,24S + \frac{23328}{20800}S = \frac{28320}{20800}S = \frac{177}{130}S.$$

По условию

$$\frac{177}{130}S < 13, \quad S < 9\frac{97}{177}.$$

При $S = 9$ это неравенство верно, а при $S = 10$ оно неверно, как и при больших S .

Ответ: 9 млн рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17** Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB = CQ:QB = CW:WD = 2:3$. В треугольнике PQW угол W острый, при этом радиус описанной около этого треугольника окружности равен $\frac{13}{4}$, $PQ = 6$, $QW = \frac{5}{2}$.
- а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

а) По теореме синусов в треугольнике PQW имеем: $\frac{PQ}{\sin W} = \frac{QW}{\sin P} = 2R$, где R — радиус описанной окружности.

$$\text{Следовательно, } \frac{6}{\sin W} = \frac{2,5}{\sin P} = \frac{13}{2}.$$

Отсюда находим

$$\sin W = \frac{12}{13}, \quad \sin P = \frac{5}{13}.$$

Учитывая, что угол W острый, а угол P меньше угла W , поскольку лежит против меньшей стороны, находим, что

$$\cos P = \sqrt{1 - \sin^2 P} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$\cos P = \sin W.$$

Тогда сумма углов P и W равна 90° и угол PQW прямой.

б) Треугольники ABC и PBQ подобны с коэффициентом $AB:PB = CB:QB = 5:3$,

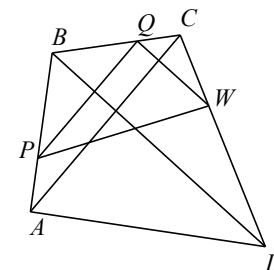
следовательно,

$$AC = \frac{5}{3}PQ = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10.$$

Аналогично треугольники BCD и QCW подобны с коэффициентом $BC:QC = DC:WC = 5:2$,

следовательно,

$$BD = \frac{5}{2}QW = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}.$$



Из подобия треугольников следует, что прямые PQ и AC параллельны и прямые QW и BD также параллельны. Значит, угол между диагоналями AC и BD равен углу PQW , то есть 90° . Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{4} = 31,25$.

Ответ: б) 31,25.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x + 2a + 6| + |x - 2a - 14| \leq 4|x| + 4|x - 4|$$

выполняется при всех значениях x .

Решение.

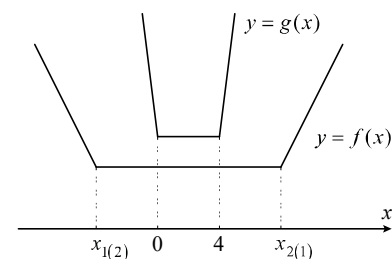
Введём обозначения $x_1 = -2a - 6$ и $x_2 = 2a + 14$. Получаем неравенство

$$|x - x_1| + |x - x_2| \leq 4|x| + 4|x - 4|.$$

Рассмотрим функции

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| \text{ и } g(x) = 4|x| + 4|x - 4|.$$

Графики этих функций — ломаные (см. рисунок).



Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда график функции $y = f(x)$ лежит не выше графика $y = g(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $f(0) \leq g(0)$ и $f(4) \leq g(4)$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} |2a + 6| + |-2a - 14| \leq 16, & |a + 3| + |a + 7| \leq 8, \\ |2a + 10| + |-2a - 10| \leq 16; & |a + 5| \leq 4. \end{cases}$$

Для решения первого неравенства системы рассмотрим три промежутка.

1. При $a < -7$ получаем $-a - 3 - a - 7 \leq 8$, откуда находим $a \geq -9$.

2. При $-7 \leq a < -3$ получаем $-a - 3 + a + 7 \leq 8$. Это верно при любом a .

3. При $a \geq -3$ получаем $a + 3 + a + 7 \leq 8$, откуда находим $a \leq -1$.

Таким образом, $-9 \leq a \leq -1$.

Решением второго неравенства является тот же промежуток $-9 \leq a \leq -1$.

Ответ: $-9 \leq a \leq -1$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -9$ и/или $a = -1$	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух функций (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 10, а среднее арифметическое шести наибольших равно 30.

- а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 8?
 б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 22?
 в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Решение.

а) Если наименьшее число равно 8, то сумма шести наименьших чисел не меньше $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63$, а их среднее арифметическое больше 10.

б) Пусть сумма четырёх наименьших чисел равна A , сумма пятого и шестого по величине чисел равна B , а сумма четырёх наибольших чисел равна C . Предположим, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно 22. Тогда получаем

$$A + B = 60, B + C = 180, A + B + C = 220,$$

откуда находим $A = 40$, $B = 20$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $A < 2B$.

в) По условию $A + B = 60$, $B + C = 180$. Среднее арифметическое будет наибольшим, когда будет наибольшей сумма всех чисел:

$$A + B + C = (A + B) + (B + C) - B = 240 - B.$$

Значит, нужно найти наименьшее значение B .

Пусть числа, написанные на доске, равны $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, причём

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}.$$

Тогда $a_1 + 4 \leq a_5$, $a_2 + 4 \leq a_6$, $a_3 + 2 \leq a_5$, $a_4 + 2 \leq a_6$, следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 12 \leq 2a_5 + 2a_6; A + 12 \leq 2B.$$

Значит, $3B \geq A + B + 12 = 72$; $B \geq 24$.

Если $B = 24$, то $a_5 \leq 11$, $a_4 \leq 10$, ..., $a_1 \leq 7$, следовательно, $A \leq 30$. Получаем противоречие, поскольку $A + B \leq 54 < 60$. Значит, $B \geq 25$.

Покажем, что число B может равняться 25. Например, если на доске написаны числа 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 110, то условия задачи выполнены

и $B = 25$. Таким образом, наибольшее значение среднего арифметического

$$\text{равно } \frac{A + B + C}{10} = \frac{240 - B}{10} = 21,5.$$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21,5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a , b и $в$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$, и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4