**Всероссийская олимпиада по математике**

**Муниципальный этап 20116–2017 уч. г.**

**7 класс**

**7.1.** В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

**Ответ**:21 девочка и 14 мальчиков. **Указание**. Пусть по списку в классе *d* девочек и *m* мальчиков. Из условий задачи имеем два уравнения:  и . Из первого уравнения . Подставив  во второе уравнение и решив его, получим *d* = 21, и тогда *m* = 14.

**7.2.** В трехзначном числе зачеркнули первую цифру и получили двузначное. Если на это двузначное число поделить исходное, то частное будет равно 9, а остаток 8. Найдите исходное число. (Приведите все возможные решения.)

**Ответ**:4 возможных числа: 224; 449; 674; 899. **Указание**. Пусть *х* – первая цифра исходного числа, *у* – двузначное число после зачеркивания *х*. Тогда имеем уравнение . Значит, *х* – четное число:  для некоторого *z* (). Поэтому , и для числа *у* + 1 возможные значения: 25; 50; 75; 100, а соответствующие числа *х* равны 2; 4; 6; 8.

.

**7.3.** На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

**Указание**. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате (1 + 2 + … + 12)⋅2, так как при таком подсчете любое ребро будет засчитано дважды. Итак, общая сумма 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма не меньше . (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не больше ).

.

**7.4.** Целые числа *m*, *n* удовлетворят равенству . Докажите, что *m* + *n* делится на 20.

**Указание**. Поскольку числа 9 и 11 взаимно просты, то число *т* должно делиться на 11, а число *п* на 9. Пусть *m* = 11*k*, тогда . Поэтому .

**7.5.** Дан прямоугольник, отличный от квадрата, у которого численное значение площади втрое больше периметра. Докажите, что одна из сторон прямоугольника больше 12.

**Указание**. Пусть  – стороны прямоугольника. По условию, , отсюда получаем равенство . Если оба числа *а* – 6 и *b* – 6 положительны, но меньше 6, то , что противоречит полученному равенству. Аналогичное противоречие получается, когда оба числа *а* – 6 и *b* – 6 больше 6 (хотя формально в этом случае искомое неравенство выполняется). Если оба числа *а* – 6 и *b* – 6 отрицательны, то , что также невозможно. Значит,  и 6, т.е. *a* < 12, *b* > 12

**8 класс**

**8.1.** В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

**Ответ**:21 девочка и 14 мальчиков. **Указание**. См. задачу 7.1.

**8.2.** На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом «клетчатом» прямоугольнике размера  (клеток) есть хотя бы одна ладья.

**Указание**. Предположим противное, и пусть, для определенности, прямоугольник расположен в пяти горизонталях и четырех вертикалях. Тогда любая ладья находится среди остальных трех горизонталей или среди остальных четырех вертикалей (или одновременно, т.е. на их пересечении). Но в трех горизонталях стоят три ладьи, а в четырех вертикалях – четыре. Значит, всего в этих горизонталях и вертикалях стоит не более семи ладей (точнее, количество ладей равно 7 минус количество ладей на пересечениях данных горизонталей и вертикалей). Получили противоречие, т.к. ладей всего 8.

**8.3.** Дан остроугольный треугольник *АВС*. Точка *М* – точка пересечения его высот. Найдите угол *А*, если известно, что *АМ* = *ВС*.

**Ответ:**  45°. **Указание**. Пусть *К* – основание высоты из точки *В*. Докажем, что треугольники *АМК* и *ВКС* равны. Действительно, имеем прямоугольные треугольники, у которых  и, по условию, *АМ* = *ВС*. Тогда из равенства треугольников следует, что *АК* = *ВК*, и значит, в прямоугольном треугольнике *АВК* катеты равны. Поэтому .

**8.4.** Докажите, что для всех натуральных *n* > 1 число *n*2016 + 4 составное.

**Указание**. Результат следует из разложения = = , и при *n* > 1 обе скобки больше 1.

**8.5.** Дан прямоугольник, отличный от квадрата, у которого численное значение площади втрое больше периметра. Докажите, что одна из сторон прямоугольника больше 12.

**Указание**. См. задачу 7.5.

**9 класс**

**9.1**. **а)** Дан треугольник, у которого высоты равны 4; 5; 6. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный? **б)** Существует ли треугольник, у которого высоты равны 2; 3; 6?

**Ответ**: **а)** остроугольный; **б)** не существует. **Указание**. Из формулы площади треугольника  следует, что стороны данного треугольника равны  (такой треугольник существует, поскольку ). Для того чтобы узнать, какой это треугольник, надо сравнить квадрат большей стороны с суммой квадратов других сторон. В данном случае из неравенства  следует, что треугольник остроугольный. **б)** Поскольку , неравенство треугольника не выполняется, и значит, такого треугольника не существует.

**9.2**. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом «клетчатом» прямоугольнике размера  (клеток) есть хотя бы одна ладья..

**Указание**. См. задачу 8.2.

**9.3**. Дан остроугольный треугольник *АВС*. Точка *М* – точка пересечения его высот. Найдите угол *А*, если известно, что *АМ* = *ВС*.

**Ответ**: 45°. **Указание**. См. задачу 8.3.

**9.4**. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5100 и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

**Указание**. Докажем по индукции более общий факт: для любого натурального *п* существует число, составленное ровно из *п* нечетных цифр и делящееся на 5*п*. База индукции легко проверяется для числа 5 (а также для 75, 375). Докажем индукционный переход: предположим, что число  составлено из *k* нечетных цифр и делится на 5*k*, т.е.  для некоторого целого *p,* и покажем, что к этому числу можно приписать слева нечетную цифру *х* так, чтобы число  делилось на , т.е.  должно делиться на , что равносильно тому, что  должно делиться на 5. Если брать в качестве *х* пять различных нечетных цифр 1, 3, 5, 7, 9, то числа  будут иметь разные остатки при делении на 5 (в противном случае для разных число  делилось бы на 5). Значит, для какой-то нечетной цифры *х* число  делится на 5, что и требовалось.

**9.5.** Дан прямоугольник, у которого численное значение площади больше утроенного периметра. Докажите, что его периметр больше 48.

**Указание**. Пусть *a*, *b* – стороны прямоугольника. Из условия задачи  

  (\*)

Сначала проверим, что оба множителя (*a* – 6) и (*b* – 6) положительны. Действительно, в противном случае из (\*) следует, что *a* –6 < 0, *b* –6 < 0. Тогда ,  и поэтому , что противоречит (\*). Теперь для положительных чисел (*a* –6) и (*b* – 6) можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:  *a* + *b* > 24  *P* > 48.

**10 класс**

**10.1**. **а)** Дан треугольник, у которого высоты равны 4; 5; 6. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный? **б)** Существует ли треугольник, у которого высоты равны 2; 3; 6?

**Ответ**: **а)** остроугольный; **б)** не существует. **Указание**. См. задачу 9.1.

**10.2**. Докажите неравенство для положительных чисел *х*, *у*: .

**Указание**. После возведения обеих частей в квадрат (что дает равносильное неравенство в силу положительности *х* и *у*) получим . Еще раз возведя в квадрат, получим равносильное неравенство    . Последнее неравенство очевидно для положительных *х* и *у*.

**10.3**. Можно ли разбить квадрат  на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины неравных сторон отличаются на единицу?

**Ответ**:нельзя. **Указание**. Предположим, что такое разбиение существует, и пусть *х*, *у* – стороны прямоугольника разбиения (). Тогда имеем два уравнения:  (для площади) и  (по условию). Решая квадратное уравнение для *х*, находим , тогда . Рассмотрим сторону квадрата . Она составлена из нескольких больших и нескольких меньших сторон нашего прямоугольника, т.е.  для некоторых целых неотрицательных *m*, *n*. Тогда . Поскольку , получаем противоречие: в правой части последнего равенства стоит иррациональное число, а в левой – рациональное.

**10.4.** Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5100 и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

**Указание**. См. задачу 9.4.

**10.5.** Дана окружность единичного радиуса с центром *О*. Точка *А* находится на расстоянии *а* от центра (). Через точку *А* проводят всевозможные хорды *MN*. **а)** Найдите длину наименьшей хорды *MN*. **б)** Найдите наибольшую площадь треугольника *OMN*.

**Ответ**: **а)** ; **б)** при  наибольшая площадь равна ; при  наибольшая площадь равна . **Указание**. **а)** По свойству хорд, пересекающихся в данной точке, произведение длин есть постоянное число. Тогда из неравенства о средних имеем , причем равенство достигается, когда *MA* = *AN,* т.е. для хорды *MN*, перпендикулярной диаметру, проходящему через точку *А*. **б)** Обозначим . Очевидно,  ( становится равным , когда хорда *MN* совпадает с диаметром, проходящем через *A*). Из формулы площади  следует, что требуется найти наибольшее значение . Пусть  (т.е. это оптимальное положение хорды из пункта а)) и  – соответствующее значение угла . Заметим, что  для любого положения *MN*, т.к. , где , и поэтому в силу пункта а) и монотонности синуса, большему значению *MN* соответствует больший угол . Если , то  и в этом случае, изменяя положение хорды *MN*, можно найти такое положение, когда  (т.к. при приближении *MN* к диаметру угол  становится близким к ). Если же , то  и поэтому в силу неравенства  и монотонного убывания функции *sin x* во второй четверти, наибольшее значение будет при .

**11 класс**

**11.1.** Решите неравенство .

**Ответ**: . **Указание**. Заметим, что  и , т.к. . Неравенство перепишем в виде

.

Методом интервалов получаем ответ (поскольку ).

**11.2**. Докажите неравенство для положительных чисел *х*, *у*: .

**Указание**. См. задачу 10.2.

**11.3.** Можно ли разбить квадрат  на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины неравных сторон отличаются на единицу?

**Ответ**:нельзя. **Указание**. См. задачу 10.3.

**11.4.** Существуют ли удовлетворяющие уравнению  **а)** различные натуральные числа *x, y, z* ? **б)** различные целые числа *x, y, z* ?

**Ответ а)** не существуют, **б) с**уществуют. **Указание**. **а)** Изнеравенства о средних для трех положительных чисел следует, что , причем равенство достигается только в случае равенства чисел , т.е. при *x=y=z*. **б)** Пример*x=*4*, y=*1*, z= -*2показывает существование искомого решения.

**11.5.** Дана окружность единичного радиуса с центром *О*. Точка *А* находится на расстоянии *а* от центра (). Через точку *А* проводят всевозможные хорды *MN*. **а)** Найдите длину наименьшей хорды *MN*. **б)** Найдите наибольшую площадь треугольника *OMN*.

**Ответ**: **а)** ; **б)** при  наибольшая площадь равна ; при  наибольшая площадь равна . **Указание**. См. задачу 10.5.