Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.
7 класс

7.1. Три положительных числа изменили следующим образом: первое увеличили на 10%, второе – на 13%, а третье уменьшили на 20%. Больше или меньше окажется произведение трех полученных чисел по сравнению с произведением исходных?

7.2. На футбольном поле встретились две команды – «Торпедо» и «Старт», по 11 человек в каждой. Средний рост игроков «Торпедо» на 2 см больше среднего роста игроков «Старта». После того, как судья удалил с поля по одному игроку каждой команды, средний рост у команд на поле сравнялся. Насколько выше удаленный игрок «Торпедо» удаленного игрока «Старта»?

7.3. Двоечник Вова складывает дроби так: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m+p}{n+q}$. **а)** Существуют ли натуральные числа m, n, p, q, для которых Вовин «способ» даст правильный ответ? **б)** Докажите, что для любых натуральных знаменателей n, q найдутся целые ненулевые числители m, p , для которых Вовин «способ» даст правильный ответ.

7.4. Прямоугольник разрезали двумя перпендикулярными разрезами на четыре меньших прямоугольника. Известно, что у трех из этих маленьких прямоугольников и площадь, и периметр – числа целые. Верно ли, что у четвертого прямоугольника **а)** периметр – целое число? **б)** площадь – целое число?

7.5. **а)** Первоклассник Петя учится считать. Он подсчитывает число всех квадратов 2×2 (клетки) на шахматной доске 8×8. Какое число у него должно получиться? **б)** Петя расставил произвольно16 пешек на клетках доски. Могло ли оказаться так, что среди всех квадратов 2×2 (см. пункт **а**) есть только один, в котором ровно одна пешка, а в остальных квадратах 2×2 – четное количество пешек (возможно, ноль)?

Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.
8 класс

8.1. На футбольном поле встретились две команды – «Торпедо» и «Старт», по 11 человек в каждой. Средний рост игроков «Торпедо» на 2 см больше среднего роста игроков «Старта». После того, как судья удалил с поля по одному игроку каждой команды, средний рост у команд на поле сравнялся. Насколько выше удаленный игрок «Торпедо» удаленного игрока «Старта»?

8.2. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число?

8.3. Прямоугольник разрезали двумя перпендикулярными разрезами на четыре меньших прямоугольника. Известно, что у трех из этих маленьких прямоугольников и площадь и периметр – числа целые. Верно ли, что у четвертого прямоугольника **а)** периметр – целое число; **б)** площадь – целое число?

8.4. **а)** Первоклассник Петя учится считать. Он подсчитывает число всех квадратов 2×2 (клетки) на шахматной доске 8×8. Какое число у него должно получиться? **б)** Петя расставил произвольно 16 пешек на клетках доски. Могло ли оказаться так, что среди всех квадратов 2×2 (см. пункт **а**) есть только пять, в каждом из которых ровно одна пешка, а в остальных квадратах 2×2 – четное количество пешек (возможно, ноль)?

8.5. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. На стороне AC отмечена точка M такая, что $AM = BC$. Найдите $\angle MBC$.

Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.
9 класс

9.1. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число?

9.2. Существуют ли действительные числа *x, y*, удовлетворяющие уравнению $x^2+7y^2+1=5xy$?

9.3. На координатной плоскости построена окружность с диаметром *OA*, где *O* – начало координат, а точка *A* имеет целые координаты (*m; n*). Через точку *A* проведена прямая, пересекающая окружность в точке *M* так, что $\angle MAO = 15°$. **а)** При любых ли целых *m, n* площадь треугольника *OAM* – число рациональное? **б)** Существуют ли нечетные *m* и *n*, для которых S_{OAM} – целое число?

9.4. Дан треугольник *ABC*, в котором $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. На стороне *AC* отмечена точка *M* такая, что *AM* = *BC*. Найдите $\angle MBC$.

9.5. **а)** Докажите, что число $N=2^{2018}+1$ составное; **б)** докажите, что *N* имеет не менее трех различных простых делителей.

Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.
10 класс

10.1. Существуют ли действительные числа *x, y*, удовлетворяющие уравнению $x^2+7y^2+1=5xy$?

10.2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sqrt{1-x^2}=ax+2$ имеет ровно один корень.

10.3. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* равнобедренный, если известно, что **а)** $R_{ABM}=R_{CBM}$; **б)** $r_{ABM}=r_{CBM}$, где *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей соответствующих треугольников?

10.4. **а)** Докажите, что если квадратный трехчлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых *x,* то все его ненулевые коэффициенты по модулю больше или равны 0.5. **б)** Существует ли такой многочлен пятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого все коэффициенты по модулю меньше 0.05?

10.5. Дано число $N=1^{25}+2^{25}+\ldots+24^{25}$. Найдите две его последние цифры;

Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.
11 класс

11.1. . Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2-2xy}>\sqrt{1-y^2}$.

11.2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sqrt{1-x^2}=ax+2$ имеет ровно один корень.

11.3. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* равнобедренный, если известно, что **а)** $R_{ABM}=R_{CBM}$; **б)** $r_{ABM}=r_{CBM}$, где *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей соответствующих треугольников?

11.4. Дана последовательность $a_1=\cos 10°$, $a_2=\cos 100°,\ldots,$ $a_n=\cos(10^n)°$ (градусов). **а)** Определите знак числа a_{100}; **б)** Докажите, что $|a_{100}| < 0{,}18$.

11.5. Дано число $N=1^{25}+2^{25}+\ldots+24^{25}$. Найдите **а)** две последние цифры числа *N*; **б)** четыре его последние цифры.